σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 02/11/14

ΘΕΜΑ Α

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 167

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 143

Γ. $1\to\Lambda$, $2\to\Sigma$, $3\to\Lambda$, $4\to\Sigma$, $5\to\Sigma$, $6\to\Lambda$, $7\to\Sigma$, $8\to\Sigma$, $9\to\Lambda$, $10\to\Lambda$

ΘΕΜΑ Β

$$B_1.\ |w|^2=w\cdot\bar{w}=\frac{z+4}{z+1}\cdot\frac{\bar{z}+4}{\bar{z}+1}=\frac{z\bar{z}+4z+4\bar{z}+16}{z\bar{z}+z+\bar{z}+1}=\frac{|z|^2+4z+4\bar{z}+16}{|z|^2+z+\bar{z}+1}=$$

$$=\frac{4+4z+4\bar{z}+16}{4+z+\bar{z}+1}=\frac{20+4z+4\bar{z}}{5+z+\bar{z}}=\frac{4\left(5+z+\bar{z}\right)}{5+z+\bar{z}}=4$$

$$B_2.\ |z|=2\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=4\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{4}{z}\qquad \text{και}\qquad |w|=2\Leftrightarrow|w|^2=4\Leftrightarrow w\cdot\bar{w}=4\Leftrightarrow\bar{w}=\frac{4}{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2015}}=\left(\frac{\bar{z}+\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}}\right)^{2015}=\left(\frac{\frac{4}{z}+\frac{4}{w}}{\frac{4}{z}-\frac{4}{w}}\right)^{2015}=\left(\frac{\frac{4w+4z}{zw}}{\frac{4w-4z}{zw}}\right)^{2015}=\left(\frac{4\left(w+z\right)}{4\left(w-z\right)}\right)^{2015}=\left(\frac{w+z}{w-z}\right)^{2015}=$$

$$=\left(-\frac{w+z}{z-w}\right)^{2015}=-\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2015}$$

Άρα $\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2015}\in I$

$$B_3.\ |w-z|\le|w|+|z|\Leftrightarrow|w-z|\le 2+2\Leftrightarrow|w-z|\le 4$$

$$B_4.\ i)\ \nu^2+\nu+1=0\Leftrightarrow\nu+1=-\nu^2\quad(1)$$

$$\nu^2+\nu+1=0\Leftrightarrow(\nu-1)\left(\nu^2+\nu+1\right)=0\Leftrightarrow\nu^3-1=0\Leftrightarrow\nu^3=1\quad(2)$$

$$ii)\ \nu^{2015}+\frac{1}{\nu^{2015}}=\nu^{3\cdot671+2}+\frac{1}{\nu^{3\cdot671+2}}=\left(\nu^3\right)^{671}\cdot\nu^2+\frac{1}{\left(\nu^3\right)^{671}\cdot\nu^2}\overset{(2)}{=}1^{671}\cdot\nu^2+\frac{1}{1^{671}\cdot\nu^2}=\nu^2+\frac{1}{\nu^2}=\frac{\nu^4+1}{\nu^2}=$$

$$=\frac{\nu^3\cdot\nu+1}{\nu^2}\overset{(2)}{=}\frac{\nu+1}{\nu}\overset{(1)}{=}\frac{-\nu^2}{\nu^2}=-1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. α)Έχουμε $f^3(x)+3f(x)+x=0$ (1) για κάθε $x\in R$ οπότε για $x=0$ προκύπτει

$f^3(0)+3f(0)=0 \Rightarrow f(0)\left(f^2(0)+3\right)=0 \Rightarrow f(0)=0$ $\acute{\eta}$ $f^2(0)+3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=0$ $\acute{\eta}$ $f^2(0)=-3$ (αδύνατη)

Για να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1.

Έχουμε $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Ακόμη $\underline{f(x_1)=f(x_2)\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}3f(x_1)=3f(x_2)}$ (+)

$f^3(x_1)+3f(x_1)=f^3(x_2)+3f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f:1-1$ άρα η f αντιστρέφεται

Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f^3(x)+3f(x)+x=0\\ y=f(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y^3+3y+x=0\Rightarrow \left.\begin{aligned} x=-y^3-3y\\ Ό\mu\omega\varsigma\ \ x=f^{-1}(y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow f^{-1}(y)=-y^3-3y\Rightarrow$$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^3-3x$, $x\in R$

β)Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε για x_1 , $x_2\in R$ έχουμε

$x_1<x_2 \overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)<f^3(x_2)$ και

$\underline{x_1<x_2 \overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}3f(x_1)<3f(x_2)}$ (+)

$f^3(x_1)+3f(x_1)<f^3(x_2)+3f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}-x_1<-x_2\Rightarrow x_1>x_2$ άτοπο

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β_1) έχουμε $f(x)<0 \underset{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x)<f(0) \overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} x>0$

β_2)Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &f\left(f(|x|+1)-13\right)<2\\ &\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \ f^{-1}(2)=-14\Leftrightarrow f(-14)=2\end{aligned}\right\} f\left(f(|x|+1)-13\right)<f(-14)\Leftrightarrow$$

$$\overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(|x|+1)-13>-14\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} f(|x|+1)>-1\\ f(4)=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow f(|x|+1)>f(4) \overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} |x|+1<4\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -3<x<3$

β'(τρόπος)

Θα μπορούσε να λυθεί η ανίσωση αν στην αρχική σχέση συνθέταμε f^{-1} που όμως απαραιτήτως δείχναμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα(εύκολο γιατί ξέρουμε και τον τύπο της).

Γ_2.Έχουμε $f(x)=x^3-2^{1-x}$ $x\in R$

α)Έστω x_1 , $x_2\in R$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (1) και ακόμη

$x_1<x_2\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}-x_1>-x_2\overset{+1}{\Leftrightarrow}1-x_1>1-x_2 \overset{2^x:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} 2^{1-x_1}>2^{1-x_2}\Leftrightarrow -2^{1-x_1}<-2^{1-x_2}$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε:

$x_1^3-2^{1-x_1}<x_2^3-2^{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα f: γνησίως αύξουσα άρα f:1-1

β)Έχουμε $x^6\cdot 2^{x^2}<2 \overset{:2^{x^2}>0}{\Leftrightarrow} x^6<\dfrac{2}{2^{x^2}} \Leftrightarrow (x^2)^3<2^{1-x^2} \Leftrightarrow (x^2)^3-2^{1-x^2}<0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(x^2)<0 \\ f(1)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)<f(1) \overset{f:\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

$\gamma)\,|z+8|^3-8|z+2|^3=\dfrac{2}{2^{|z+8|}}-\dfrac{2}{4^{|z+2|}} \Leftrightarrow |z+8|^3-8|z+2|^3=2^{1-|z+8|}-\dfrac{2}{2^{2|z+2|}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+8|^3-2^{1-|z+8|}=\left(2|z+2|\right)^3-2^{1-2|z+2|} \Leftrightarrow f(|z+8|)=f(2|z+2|) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} |z+8|=2|z+2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+8|^2=4|z+2|^2 \Leftrightarrow (z+8)(\bar z+8)=4(z+2)(\bar z+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar z+8z+8\bar z+64=4\left(z\bar z+2z+2\bar z+4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar z+8z+8\bar z+64=4z\bar z+8z+8\bar z+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z\bar z=48 \Leftrightarrow z\bar z=16 \Leftrightarrow |z|^2=16 \Leftrightarrow |z|=4$

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Αν $z=x+yi$ με x , $y\in R$ έχουμε:

$\dfrac{3}{2}\cdot\left(z+\bar z\right)+2i^{2015}\cdot\left(z-\bar z\right)+25i^{2014}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\cdot 2\,\mathrm{Re}(z)+2i^{2015}\cdot 2i\,\mathrm{Im}(z)\cdot i+25i^{2014}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\cdot 2x+2i^{2016}\cdot 2y+25i^{2014}=0 \Leftrightarrow 3x+4y-25=0\ \ (\varepsilon)$

Δ_2. Θεωρούμε την ευθεία (δ) που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=\dfrac{4}{3}$

Άρα $(\delta): y=\dfrac{4}{3}x$

Το σημείο τομής των (ε) και (δ) είναι:

$\left.\begin{matrix} 3x+4y-25=0 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x+\dfrac{16x}{3}-25=0 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 9x+16x=75 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 25x=75 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$

Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι $z_1=3+4i$ με $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\Delta_3.\alpha)\, D_f=\left[-|w|,+\infty\right]$

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[-|w|,+\infty\right]$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+|w|<x_2+|w| \Leftrightarrow \sqrt{x_1+|w|}<\sqrt{x_2+|w|} \Leftrightarrow \sqrt{x_1+|w|}-|z_1|<\sqrt{x_2+|w|}-|z_1| \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα , οπότε και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$\beta)\ y=\sqrt{x+|w|}-5 \Leftrightarrow y+5=\sqrt{x+|w|} \overset{y>-|z_1|}{\Leftrightarrow} (y+5)^2=x+|w| \Leftrightarrow x=(y+5)^2-|w|$

Άρα : $f^{-1}(x)=(x+5)^2-|w|$ με $D_{f^{-1}}=[-5,+\infty)$

γ)Εφόσον οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν τέμνονται , η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$, δεν θα έχει λύση.

Άρα :

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow \sqrt{x+|w|}-5=x\Leftrightarrow \sqrt{x+|w|}=x+5\Leftrightarrow x+|w|=x^2+10x+25\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+9x+25-|w|=0$$

Προφανώς θα ισχύει: $\Delta<0\Leftrightarrow 81-100+4|w|<0\Leftrightarrow 4|w|<19\Leftrightarrow |w|<\dfrac{19}{4}$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\dfrac{19}{4}$, χωρίς τον κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\dfrac{19}{4}$.

δ) $f\left(2-f^{-1}(|z_1|)\right)=1\Leftrightarrow f\left(2-f^{-1}(5)\right)=1 \quad (1)$

$f^{-1}(5)=10^2-|w|=100-|w|$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$f\left(2-100+|w|\right)=1\Leftrightarrow \sqrt{-98+|w|+|w|}-5=1\Leftrightarrow \sqrt{2|w|-98}=6\Leftrightarrow 2|w|-98=36\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2|w|=134\Leftrightarrow |w|=77$$

Άρα κύκλος με κέντρο $K(0,0)$ και $\rho=77$

Ακόμη $|z-w|_{\min}=\left|d(K,\varepsilon)-\rho\right|=|5-77|=72$

Όπου $\varepsilon: 3x+4y-25=0$ ο γεωμετρικός του z

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5$$

ε) *i)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{f^{-1}(x)+|w|}}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{(x+5)^2-|w|+|w|}}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{(x+5)^2}}{x^2+3x-10}=$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{|x+5|}{(x+5)(x-2)}$$

Αν $x>-5$ $\quad \lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}(x-2)}=\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{7}$

Αν $x<-5$ $\quad \lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{-(x+5)}{(x+5)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{-1}{x-2}=\dfrac{1}{7}$

Άρα δεν υπάρχει το όριο

ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f\left(x^2+5x+1-|w|\right)}{9-x^2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+5x+1}-5}{9-x^2}=$

$f\left(x^2+5x+1-|w|\right)=\sqrt{x^2+5x+1-|w|+|w|}-5$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x+1-25}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x^2+5x+1}+5\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x^2+5x+1}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+8)}{-\cancel{(x-3)}(3+x)\left(\sqrt{x^2+5x+1}+5\right)}=-\lim_{x\to 3}\frac{x+8}{(3+x)\left(\sqrt{x^2+5x+1}+5\right)}=-\frac{11}{6\cdot 10}=-\frac{11}{60}$$