σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ 02/11/14

ΘΕΜΑ Α

1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 25
2. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 43
3. α→Λ , β→Σ , γ→Σ , δ→Λ , ε→Σ , στ→Λ , ζ→Σ , η→Λ , θ→Λ , ι→Σ

ΘΕΜΑ Β

α) Έχουμε $\vec{\alpha}=(\lambda,\lambda-5)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-3,6)$ οπότε

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2\lambda-3,\lambda+1)$ άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(2\lambda-3)^2+(\lambda+1)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(2\lambda-3)^2+(\lambda+1)^2=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda+9+\lambda^2+2\lambda+1=5\Leftrightarrow 5\lambda^2-10\lambda+5=0\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow$

$\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$

β) *i)* Έχουμε $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=4(1,-4)+3(-2,6)\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(4,-16)+(-6,18)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(4-6,-16+18)\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(-2,2)$

Άρα $\left.\begin{array}{l}\lambda=\varepsilon\varphi\omega\\ \lambda=\dfrac{y}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=\dfrac{2}{-2}=-1=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\omega=135^0$

ii) $\vec{\delta}//\vec{\gamma}\Leftrightarrow\det(\vec{\gamma},\vec{\delta})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2 & 2\\ \kappa & \kappa-6\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-2(\kappa-6)-2\kappa=0\Leftrightarrow-2\kappa+12-2\kappa=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\kappa=12\Leftrightarrow\kappa=3$

γ) Εφόσον $\kappa=3$ έχουμε $\vec{\delta}=(3,-3)$ και τότε

$\vec{u}=\mu\vec{\delta}+\lambda\vec{\alpha}\Leftrightarrow(1,2)=\mu(3,-3)+\lambda(1,-4)\Leftrightarrow(1,2)=(3\mu,-3\mu)+(\lambda,-4\lambda)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1,2)=(3\mu+\lambda,-3\mu-4\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}3\mu+\lambda=1\\ -3\mu-4\lambda=2\end{cases}(+)$

$-3\lambda=3\Rightarrow\lambda=-1$

Άρα $3\mu-1=1\Rightarrow 3\mu=2\Rightarrow\mu=\dfrac{2}{3}$

Άρα $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{\delta}-\vec{\alpha}$

ΘΕΜΑ Γ

α)Εχουμε $2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-3\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$

Θεωρούμε σημείο το σημείο Α οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-3\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-3\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+3\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

β) Εφόσον έχουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{2}$

άρα

$$3\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}=8\overrightarrow{\mathrm{AM}}-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}={}^{4}\cancel{8}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{\cancel{2}}-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}=4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}=4\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Γ οπότε έχουμε:

$$3\left(\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\right)=-4\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}-3\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=-4\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}=-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

$\gamma)\ i)$ Έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}&=\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\\&=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{KN}}&=\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{aligned}$$

$ii)$ $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=2\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=2\overrightarrow{\mathrm{KN}}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}\,/\,/\overrightarrow{\mathrm{KN}}\Leftrightarrow$ Κ , Λ ,Ν συνευθειακά

ΘΕΜΑ Δ

A_1.Έχουμε $\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot(1\,,-1)-(2\,,-1)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|\,,-|\vec{\alpha}|\right)-(2\,,-1)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2,-|\vec{\alpha}|+1\right)$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(|\vec{\alpha}|-2\right)^2+\left(1-|\vec{\alpha}|\right)^2}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2=\left(|\vec{\alpha}|-2\right)^2+\left(1-|\vec{\alpha}|\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{|\vec{\alpha}|^2}=\cancel{|\vec{\alpha}|^2}-4|\vec{\alpha}|+4+1-2|\vec{\alpha}|+|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5=0\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=1\ \text{ ή }\ |\vec{\alpha}|=5$$

Αν $|\vec{\alpha}|=1$ τότε $\vec{\alpha}=(-1,0)$ αδύνατο διότι $\vec{\alpha}$ μη παράλληλο στον άξονα $x'x$

Άρα $|\vec{\alpha}|=5$ οπότε $\vec{\alpha}=(3,-4)$

A_2. Εφόσον $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{matrix}\vec{\beta}=\kappa\vec{\alpha}\\ \mu\varepsilon\ \kappa<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=\left|\kappa\vec{\alpha}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\left|\vec{\beta}\right|=\left|\kappa\right|\left|\vec{\alpha}\right|\\ \left|\vec{\beta}\right|=3\left|\vec{\alpha}\right|\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 3\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\kappa\right|\left|\vec{\alpha}\right|\Leftrightarrow\left|\kappa\right|=3\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\kappa=\pm3\\ \kappa<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\kappa=-3$$

Άρα $\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}=-3(3,-4)=(-9,12)$

A_3. Έχουμε $2\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}=2(3,-4)+\frac{1}{3}(-9,12)=(6,-8)+(-3,4)=(3,-4)$

$$\left|2\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

B. 1. Έχουμε $\lambda_{AB}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{(2\alpha+10)}{\alpha}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4(2\alpha+10)=3\alpha\Rightarrow 8\alpha+40=3\alpha\Rightarrow\alpha=-8$

Για $\alpha=-8$ το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ γίνεται $\overrightarrow{AB}=(-8,-6)$

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

2. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)\Rightarrow(-8,-6)=(x_B-3,y_B-5)\Rightarrow\begin{cases}x_B-3=-8\\ y_B-5=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=-5\\ y_B=-1\end{cases}$

3. Το σημείο M είναι το μέσο του AB, άρα:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Επομένως $M(-1,2)$

$$\overrightarrow{MN}=(-1,1)\Rightarrow(x_N-x_M,y_N-y_M)=(-1,1)\Rightarrow(x_N+1,y_N-2)=(-1,1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_N+1=-1\\ y_N-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=-2\\ y_N=3\end{cases}$$

Επομένως $N(-2,3)$

4. $x_N=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}\Rightarrow-2=\frac{3+x_\Gamma}{2}\Rightarrow-4=3+x_\Gamma\Rightarrow x_\Gamma=-7$

$$y_N=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}\Rightarrow 3=\frac{5+y_\Gamma}{2}\Rightarrow 6=5+y_\Gamma\Rightarrow y_\Gamma=1$$

Επομένως $\Gamma(-7,1)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B,y_\Gamma-y_B)=(-7+5,1+1)=(-2,2)$ Είναι $\lambda_{\overrightarrow{B\Gamma}}=\frac{y}{x}=\frac{2}{-2}=-1$

5. Για να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αρκεί να βρούμε πραγματικούς αριθμούς λ και μ ώστε : $\vec{\nu}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$

Όμως $\vec{\nu}=(16,-2)$, $\overrightarrow{AB}=(-8,-6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-10,-4)$ οπότε:

$$\vec{\nu}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow(16,-2)=\lambda(-8,-6)+\mu(-10,-4)\Rightarrow(16,-2)=(-8\lambda,-6\lambda)+(-10\mu,-4\mu)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-8\lambda-10\mu=16\\ -6\lambda-4\mu=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\lambda-5\mu=8\\ -3\lambda-2\mu=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=-4\\ \lambda=3\end{cases}$$

Επομένως $\vec{\nu}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{A\Gamma}$