σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΊΟΥ 02/11/14

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+..........+\alpha_1 x+\alpha_0$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Αν Α και Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{AB}|=(AB)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β. Έστω δυο συναρτήσεις f ,g με πεδίο ορισμού το Α , Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης "1-1" , τέμνει τον άξονα x΄x ακριβώς σε ένα σημείο
2. Αν ισχύει $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A_f$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει πάντα μέγιστο στο $x_0\in A_f$
3. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$ τότε για κάθε $x\in A_f$ ισχύει $f(x)>0$
4. Ισχύει $|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$
5. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και "1-1"
6. Για ποιαδήποτε συνάρτηση που είναι "1-1" οι συναρτήσεις $f\circ f^{-1}$ και $f^{-1}\circ f$ είναι ίσες
7. Αν f είναι μια "1-1" συνάρτηση , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\alpha\ ,\ \alpha)$ τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $M(\alpha\ ,\ \alpha)$
8. Για κάθε z , w $\in C$ ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)$
9. Ισχύει πάντα η ισοδυναμία $\alpha+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=0$
10. Τα κοινά σημεία ανάμεσα στην C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται αν λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x$ ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w για τους οποίους γνωρίζουμε ότι $|z|=2$ και $w=\dfrac{z+4}{z+1}$

B_1.Να δείξετε ότι $|w|=2$

Μονάδες 6

B_2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2015}$ είναι φανταστικός Μονάδες 6

B_3. Να δείξετε ότι $|w-z| \le 4$ Μονάδες 5

B_4. Αν για τον μιγαδικό αριθμό ν γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $v^2+v+1=0$

Να αποδείξετε ότι:

$i)\ v^3=1$

$ii)\ v^{2015}+\frac{1}{v^{2015}}=-1$ Μονάδες 3+5

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με $f^3(x)+3f(x)+x=0$ για κάθε $x \in R$

α) Να υπολογιστεί το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

Μονάδες 6

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να λυθούν οι ανισώσεις :

$\beta_1)\ f(x)<0$

$\beta_2)\ f\left(f(|x|+1)-13\right)<2$ Μονάδες 7

Γ_2. Έστω $f(x)=x^3-2^{1-x}$, $x \in R$

α) Να δείξετε ότι f είναι $1-1$

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^6 \cdot 2^{x^2}<2$

γ) Να βρεθεί το $|z|$ αν ισχύει $|z+8|^3-8|z+2|^3=\frac{2}{2^{|z+8|}}-\frac{2}{4^{|z+2|}}$ Μονάδες 3+4+5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\frac{3}{2}\left(z+\bar{z}\right)+2i^{2015}\left(z-\bar{z}\right)+25i^{2014}=0$$

Δ_1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Δ_2. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z έχει το ελάχιστο μέτρο .

Δ_3. Έστω $z_1=3+4i$ είναι ο μιγαδικός που προσδιορίσαμε στο ερώτημα Δ_2.

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό w και τη συνάρτηση f η οποία έχει τύπο

$$f(x)=\sqrt{x+|w|}-|z_1|$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

β) Να προσδιορίσετε την f^{-1}.

γ) Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν τέμνονται , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

δ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του w αν γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$f\left(2-f^{-1}\left(\left|z_1\right|\right)\right)=1$ και στη συνέχεια να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ όπου z ο μιγαδικός από το Δ1 ερώτημα

ε)Να υπολογιστούν αν υπάρχουν τα όρια:

$i)\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{f^{-1}(x)+|w|}}{x^2+3x-10}$ $ii)\lim_{x\to 3}\frac{f\left(x^2+5x+1-|w|\right)}{9-x^2}$ Μονάδες 2+3+3+3+4+5+5

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Κ Α Λ Η   Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α