σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 02/11/14

ΘΕΜΑ Α

Α. Αν $A(x_1\,,\,y_1)$ και $B(x_2\,,\,y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου , να αποδείξετε ότι για τις συντεταγμένες του μέσου $M(x\,,\,y)$ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισχύει :

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ Μονάδες 7,5

Β. Αν $\vec{\alpha}=(x_1\,,\,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2\,,\,y_2)$ δύο παράλληλα διανύσματα να αποδείξετε ότι για τους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_{\vec{\beta}}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$. Μονάδες 7,5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος:

α. Ισχύει ότι $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ για κάθε τυχαίο σημείο Ο.

β. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ τότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

γ. Ισχύει ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$

δ. Αν το Μ μέσο του ΑΒ τότε για κάθε σημείο Ο ισχύει $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{2}$

ε. Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ τότε $\kappa\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με $\kappa\,,\,\lambda\neq 0$

στ. Αν $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$ τότε το Μ είναι μέσο του $\overrightarrow{AB}$

ζ. Αν $\vec{\alpha}=(x\,,\,y)$, με $x,y\neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{y}{x}$

η. Για τα σημεία $A(x_1\,,\,y_1)$ και $B(x_2\,,\,y_2)$ ισχύει ότι $\overrightarrow{BA}=(x_2-x_1\,,\,y_2-y_1)$

θ. Αν $\vec{\alpha}=(x\,,\,y)$ με $\vec{\alpha}\,//\,y'y$ τότε ισχύει $x=0$ ή $y=0$

ι. Αν ισχύει $\det(\vec{\alpha}\,,\,\vec{\beta})=0$ τότε υπάρχει αριθμός $\lambda\in R$ ώστε να ισχύει $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda\,,\,\lambda-5)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-3\,,\,6)$ με $\lambda\in R$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{5}$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

β)Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

$i)$ Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

$ii)$ Να βρείτε τον $\kappa \in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\kappa\ ,\ \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

γ)Αν $\kappa = 3$ να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (1\ ,\ 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 6+6+6+7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο του ΒΓ.

α) Αν για το σημείο Κ ισχύει $2\overrightarrow{\text{ΑΓ}} - 3\overrightarrow{\text{ΚΓ}} = \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΚ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

β)Αν για το σημείο Λ ισχύει ότι $3\overrightarrow{\text{ΑΛ}} = 8\overrightarrow{\text{ΑΜ}} - 5\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΓΛ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.

γ)Θεωρούμε τα σημεία Κ και Λ των ερωτημάτων (α) και (β) και επιπλέον σημείο Ν της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε : $\overrightarrow{\text{ΑΝ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

$i)$ Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΚΛ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΚΝ}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.

$ii)$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ , Ν , Λ είναι συνευθειακά . Μονάδες 5+5+7+8

ΘΕΜΑ Δ

Α. Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha}$, μη παράλληλο στον άξονα $x'x$, για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot (1\ ,\ -1) - (2\ ,\ -1)$$

A_1. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3\ ,\ -4)$.

A_2. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\beta}$ που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο του $\vec{\alpha}$.

A_3. Να βρεθεί το μέτρο $\left|2\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}\right|$ Μονάδες 4+4+4

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{Α}(3\ ,\ 5)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = (\alpha\ ,\ 2\alpha + 10)$ με $\alpha \in R^*$. Έστω επίσης Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Αν ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ είναι $\frac{3}{4}$ και $\overrightarrow{\text{ΜΝ}} = (-1\ ,\ 1)$ τότε :

1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -8$ και να βρεθεί το $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}|$ Μονάδες 2

2. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Β είναι $\text{Β}(-5\ ,\ -1)$ Μονάδες 2,5

3. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν είναι $\text{Μ}(-1\ ,\ 2)$ και $\text{Ν}(-2\ ,\ 3)$

Μονάδες 2,5

4. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $\Gamma(-7\ ,\ 1)$ και να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ Μονάδες 3

5. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = (16\ ,\ -2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ **Απαγορεύονται τα σκονάκια !!!**