σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ &ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ 1/11/2015

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Θεωρία - απόδειξη σχολικού βιβλίου

Β) 1-Σ, 2-Σ, 3-Σ, 4-Λ, 5-Λ, 6-Λ, 7-Σ, 8-Σ, 9-Σ, 10-Σ

Γ) 1. μία, 2. τεμνόμενες- τομή, 3. παράλληλες, 4. αντικείμενες , 5. μεσοκάθετος, 6. ισαπέχει, 7. συμπληρωματικές, 8. έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία, 9. απόστημα- διχοτομεί- αντίστοιχο τόξο της, 10. τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες

ΘΕΜΑ 2ο

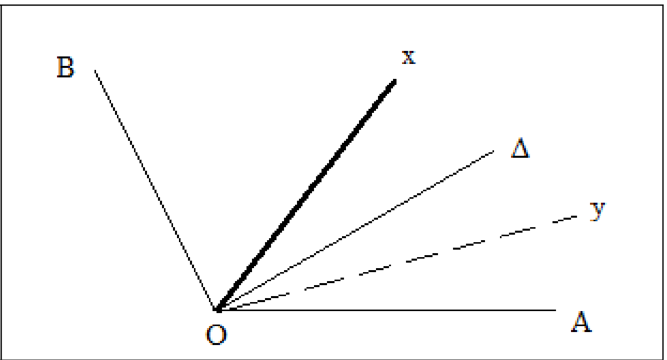
Α) Έχουμε το διπλανό σχήμα:

Η Οx είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$,

άρα ισχύει ότι: $A\hat{O}x = x\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$ (1)

Η Oy είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Delta$, άρα ισχύει ότι:

$A\hat{O}y = y\hat{O}\Delta = \dfrac{A\hat{O}\Delta}{2}$ (2)



α) Έχουμε:

$$B\hat{O}y = B\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}y \overset{(2)}{=} B\hat{O}\Delta + \frac{A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{2B\hat{O}\Delta + A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{B\hat{O}\Delta + \left(B\hat{O}\Delta + A\hat{O}\Delta\right)}{2} =$$

$$= \frac{B\hat{O}\Delta + B\hat{O}A}{2}$$

Β΄ τρόπος: Εκφράζουμε τις γωνίες του β΄ μέλους συναρτήσει της γωνίας του α΄ μέλους.

Έχουμε: $$x\hat{O}y = A\hat{O}x - A\hat{O}y \overset{(1),(2)}{=} \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{B\hat{O}\Delta}{2}$$

Β) i) $A\hat{O}\Gamma$ **ii)** $B\hat{O}\Delta$ **iii)** $\Gamma\hat{O}\Delta$ **iv)** $\Gamma\hat{O}\Delta$

Γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΘ και ΔΗΖ: Ι) $\delta_\alpha = \delta_\delta$ ΙΙ) ΑΓ=ΔΖ ΙΙΙ) $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2$(ως μισά ίσων γωνιών), άρα από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.
Τώρα, συγκρίνουμε τα ζητούμενα τρίγωνα που είναι ίσα, δηλαδή ΑΒΓ=ΔΕΖ, από

κριτήριο Γ-Π-Γ ($\hat{A}=\hat{\Delta}$,ΑΓ=ΔΖ, $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$).

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Αφού Μ μέσο του ΑΒ, θα είναι ΑΜ=ΜΒ (1). Επομένως θα έχουμε:

i) Είναι: $\Sigma A+\Sigma B=\cancel{AM}+M\Sigma+\Sigma M\cancel{-MB}\overset{(1)}{=}2\Sigma M\Leftrightarrow \Sigma M=\dfrac{\Sigma A+\Sigma B}{2}$

ii) Είναι:

$$PA-PB=(PM+MA)-(MB-PM)=PM\cancel{+MA-MB}+PM\overset{(1)}{=}2PM\Leftrightarrow PM=\frac{PA-PB}{2}$$

Β) Η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AO\Gamma}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}=40^\circ+60^\circ=100^\circ$ και επειδή το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, θα είναι $A\hat{O}\Gamma=100^\circ$. Ομοίως, η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{B\Delta}-\overset{\frown}{B\Gamma}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ (εφόσον η ΒΔ είναι διάμετρος και επομένως θα είναι $\overset{\frown}{B\Delta}=180^\circ$) , άρα και $\Gamma\hat{O}\Delta=120^\circ$.

Το τόξο $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}=\overset{\frown}{A\Delta}+\overset{\frown}{\Delta\Gamma}=140^\circ+120^\circ=260^\circ$, αφού $\overset{\frown}{A\Delta}=\overset{\frown}{B\Delta}-\overset{\frown}{AB}=180^\circ-40^\circ=140^\circ$

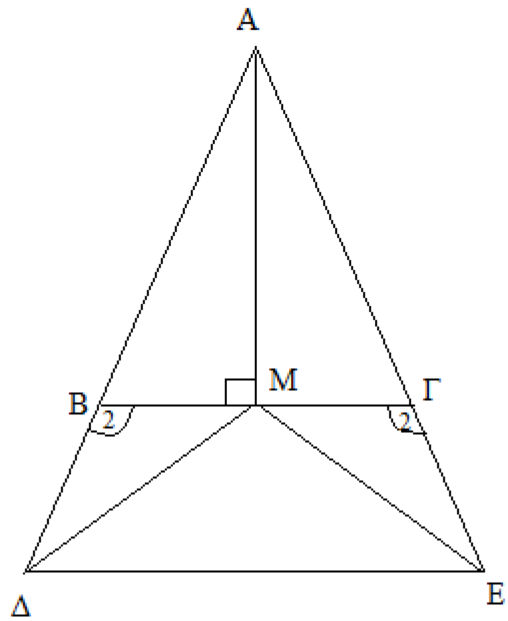
Γ) Αρκεί ν.δ.ο. ΜΔ=ΜΕ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΓΕΜ.

i) ΒΔ=ΓΕ

ii) $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

iii) ΒΜ=ΜΓ (ΑΜ= $\upsilon_\alpha=\mu_\alpha=\delta_\alpha$)

Άρα, τα τρίγωνα από κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα, οπότε και τα υπόλοιπα στοιχεία τους αντίστοιχα θα είναι ίσα, επομένως και ΜΔ=ΜΕ, επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές .



ΘΕΜΑ 4ο

Α) Αρκεί να δείξουμε ότι $B\hat{A}O=\Gamma\hat{A}O$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ: i) ΑΒ=ΑΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Α, ΑΒ) ii) ΟΒ=ΟΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο, ΟΒ) και iii) ΟΑ κοινή, άρα από το 3ο κριτήριο ισότητας Π-Π-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως και τα υπόλοιπα στοιχεία τους αντίστοιχα θα είναι ίσα: i) $B\hat{A}O=\Gamma\hat{A}O$, ii) $A\hat{O}B=A\hat{O}\Gamma$, iii) $\hat{B}=\hat{\Gamma}$

Β) 1) Αρκεί ν.δ.ο. ΑΕ=ΑΖ.

Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι: ΑΒ=ΑΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΓ:

i) ΑΒ=ΑΓ

ii) $B_{\varepsilon\xi} = \Gamma_{\varepsilon\xi}$ (ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών)

iii) ΒΕ= ΓΖ (από υπόθεση)

Από κριτήριο Π-Γ-Π, τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Άρα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους αντίστοιχα θα είναι ίσα, συνεπώς και ΑΕ=ΑΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

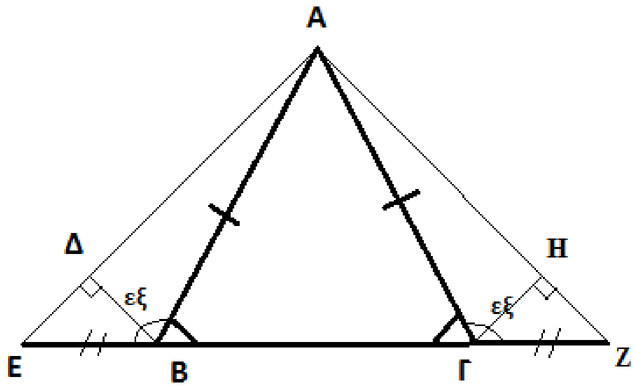
2) Αρκεί ν.δ.ο. ΒΔ=ΓΗ.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΒ και ΓΗΖ.

i) ΒΕ=ΓΖ

ii) $\hat{E} = \hat{Z}$ (από προηγούμενη σύγκριση)

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή, ΔΕΒ=ΓΗΖ και τα υπόλοιπα στοιχεία τους αντίστοιχα θα είναι ίσα, επομένως και ΒΔ=ΓΗ.



Γ) α) Φέρνουμε τα αποστήματα ΟΛ και ΟΜ στις χορδές ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, οπότε:

$O\hat{\Lambda}K = O\hat{M}K = 90^\circ$, ΛΑ=ΛΒ, ΜΓ=ΜΔ. Από τις σχέσεις: i) $O\hat{\Lambda}K = O\hat{M}K = 90^\circ$ ii) ΟΚ κοινή και iii) $A\hat{K}O = O\hat{K}\Gamma$ (υπόθεση), τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, άρα: ΚΛ=ΚΜ (1), ΟΛ= ΟΜ (2). (2)$\Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$ (3), εφόσον τα αντίστοιχα αποστήματά τους είναι ίσα.

β) Είναι: $KA = K\Lambda + \Lambda A \overset{(1)}{=} KM + \frac{AB}{2} \overset{(3)}{=} KM + \frac{\Gamma\Delta}{2} = KM + M\Gamma = K\Gamma$ και

$KB = KA - AB \overset{(3)}{=} K\Gamma - \Gamma\Delta = K\Delta$