

**Θέμα 1°**

**A)** Θεωρία βιβλίου σελ. 184

$$\mathbf{B)} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 45^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 135^\circ$$

Από νόμο συνημιτόνων για την πλευρά ΑΓ θα έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΒΓ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ = 49 + 50 - 70\sqrt{2} \cdot (-\sigma\upsilon\nu 45^\circ) = 99 + 70\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 169 \text{ \acute{a} } \rho\alpha \text{ } ΑΓ = \sqrt{169} = 13$$

**Θέμα 2°**

**A)** Από νόμο συνημιτόνων για την πλευρά ΑΒ θα έχουμε

$$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΒΓ \cdot \sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma} = 9 + 64 - 48\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 73 - \frac{48}{2} = 73 - 24 = 49, \text{ \acute{a}ρα}$$

$$ΑΒ = \sqrt{49} = 7$$

Από το 1° θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2} \Leftrightarrow 49 + 9 = 2ΑΜ^2 + \frac{64}{2} \Leftrightarrow 2ΑΜ^2 = 58 - 32 \Leftrightarrow ΑΜ^2 = \frac{26}{2} \Leftrightarrow ΑΜ = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{B)} \alpha) \text{ Επειδή } \alpha = 3 = \sqrt{9} > \sqrt{5}, \text{ είναι } \left. \begin{array}{l} \alpha^2 = 9 \\ \beta^2 + \gamma^2 = 2 + 5 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ, \text{ \acute{a}ρα}$$

αμβλυγώνιο.

β) Από νόμο συνημιτόνων για την πλευρά ΑΒ θα έχουμε

$$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΒΓ \cdot \sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 5 = 2 + 9 - 6\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$$

γ) Από γενικευμένο Πυθαγόρειο αμβλείας γωνίας για την πλευρά ΒΓ έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow 9 = 5 + 2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

### **Θέμα 3<sup>ο</sup>**

$$\mathbf{A)} \alpha) \left. \begin{array}{l} B\Gamma^2 = 144 \\ AB^2 + \Gamma A^2 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + \Gamma A^2 \Leftrightarrow \widehat{A} > 90^\circ \text{ \u03c1\u03b1 \u03b1\u03bc\u03b2\u03bb\u03c5\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf.}$$

\u03b2) \u038c\u03c1\u03bf \u03c4\u03bf 1<sup>o</sup> \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 \u03b4\u03b9\u03b1\u03bc\u03b5\u03c3\u03c9\u03bd \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow 36 + 64 = 2AM^2 + \frac{144}{2} \Leftrightarrow 200 = 4AM^2 + 144 \Leftrightarrow AM^2 = 14, \u03c1\u03b1$$

$$AM = \sqrt{14}$$

\u03b3) \u038c\u03c1\u03bf \u03c4\u03bf 2<sup>o</sup> \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 \u03b4\u03b9\u03b1\u03bc\u03b5\u03c3\u03c9\u03bd \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta \Leftrightarrow 100 = 24M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{25}{6}$$

**B)** \u03c1) \u038c\u03c1\u03bf \u03bd\u03cc\u03bc\u03bf \u03c3\u03c5\u03bd\u03b7\u03bc\u03b9\u03c4\u03cc\u03bd\u03c9\u03bd \u03b3\u03b9\u03b1 \u03c4\u03b7\u03bd \u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03ac B\Gamma \u03b8\u03b1 \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\u03c5\u03bd \widehat{A} \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\u03c5\u03bd 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot (-\sigma\u03c5\u03bd 60^\circ) \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$$

\u03b2) \u038c\u03c1\u03bf \u03c4\u03bf 1<sup>o</sup> \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 \u03b4\u03b9\u03b1\u03bc\u03b5\u03c3\u03c9\u03bd \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow \gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\gamma^2 + 2\beta^2 = 4\mu_\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = 4\gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma^2 = 3\gamma^2 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$$

### **Θέμα 4<sup>ο</sup>**

**A)** \u03c1) \u038c\u03c1\u03bf \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf MAB \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03b8\u03c1\u03c9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf\u03bf \u03b1\u03c6\u03cc\u03c5 \u03b7 \u03b5\u03b3\u03b3\u03b5\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b1 \u038c\u038c\u038c\u038c\u038c \u03b2\u03b1\u03b9\u03bd\u03b5\u03b9 \u03c3\u03b5 \u03b7\u03bc\u03b9\u03ba\u03c5\u03ba\u03bb\u03b9\u03bf \u03c1\u03c1\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03b8\u03b7\u03b9. \u038c\u03c1\u038c \u038c\u038c \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c4\u03bf \u03c5\u03c0\u03c9\u03c3 \u03c0\u03c9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c9\u03b9\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c3\u03c4\u03b7\u03bd \u03c5\u03c0\u03c4\u03b5\u03b9\u03bd\u03c9\u03c3\u03b1 \u03c4\u03c9\u03c5 \u03c1\u03b8\u03c1\u03c9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf\u03bf \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf \u03b5\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c3 \u03b8\u03b1 \u03b9\u03c3\u03c7\u03c5\u03b5\u03b9 \u03c4\u03c9\u03c5 M\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta B

\u03b2) \u038c\u03c1\u03bf \u03c4\u03bf 1<sup>o</sup> \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 \u03b4\u03b9\u03b1\u03bc\u03b5\u03c3\u03c9\u03bd \u03c3\u03c4\u03bf \u03c1\u03b8\u03c1\u03c9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf M\Delta\Gamma \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{\Delta\Gamma^2}{2} \quad (1).$$

Όμως είναι  $\left. \begin{array}{l} AO = BO = R \\ \Gamma\Gamma = B\Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma O = O\Delta$ , ως διαφορά ίσων τμημάτων, επομένως θα είναι

$$\Gamma\Delta = \Gamma O + O\Delta = 2O\Delta \quad (2)$$

Άρα θα έχουμε

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2R^2 + \frac{4O\Delta^2}{2} \Leftrightarrow M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2R^2 + 2O\Delta^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$$

**B)** α) Από τη σχέση  $\frac{AB}{3} = \frac{A\Gamma}{4} = \frac{B\Gamma}{5}$  προκύπτει ότι  $A\Gamma = \frac{4}{5}B\Gamma < B\Gamma$  και  $AB = \frac{3}{5}B\Gamma < B\Gamma$ .

Επομένως εφαρμόζοντας Α.Π.θ. έχουμε ότι  $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ , άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

$$\beta) \text{ Ισχύει ότι: } \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\frac{9}{25} \cancel{B\Gamma^2}}{\frac{16}{25} \cancel{B\Gamma^2}} = \frac{9}{16}$$