



ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727-222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113-949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΟΝΟΜΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 11-07-16

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

Μονάδες 10

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος:

α. Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |\overline{z_1} \cdot z_2|$.

β. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

γ. Αν $|z|^2 = z^2$, τότε ο z είναι πραγματικός.

δ. Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες.

ε. Αν η f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.

στ. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f .

ζ. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και $f(3) > f(2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

η. Αν $f(A) = (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

θ. Οι C_f και C_{-f} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

ι. Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 1$.

(ΜΟΝ.7)

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$.

(ΜΟΝ.10)

B3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$.

(ΜΟΝ.8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι $A_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Γ1. Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1} .

Μονάδες 7

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

Μονάδες 4

Γ4. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\alpha x}$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $f''(x) + 3f'(x) = 4f(x)$.

Μονάδες 5

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $xe^{x+1} \geq -1$.

Μονάδες 6

Δ3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f(1) = 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} = -3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x-\alpha}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex$.

iii) Για $\alpha = -1$ να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

iv) Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(2x)}$.

Μονάδες $2 \times 4 = 8$

Καλή επιτυχία

Διάρκεια 3 ώρες



