



ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727-222594  
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113-949422  
[www.syghrono.gr](http://www.syghrono.gr)

ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΟΝΟΜΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 31-07-15

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** α) Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι

και συνεχής στο σημείο αυτό.

β) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  να αποδείξετε ότι και η

συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{Μονάδες 7+7}$$

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό

του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

Μονάδες 5

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

**i.** Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f+g$  στο  $x_0$ .

**ii.** Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε δεν είναι και συνεχής στο  $x_0$ .

**iii.** Η εξίσωση  $z + \bar{z} = 0$  παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τον φανταστικό άξονα.

**iv.** Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(1) = 0$ , τότε το  $f(1)$  είναι πάντα τοπικό ακρότατο.

**v.** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx .$$

- v. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \quad \text{Μονάδες 6}$$

### ΘΕΜΑ Β

B<sub>1</sub>. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \frac{14+3i}{2-i} - i^{30} + i^{45}$  και  $w = (1+2i)^3 + i(3-i)^2$

α) Να γράψετε τους  $z$  και  $w$  στη μορφή  $\alpha + \beta i$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον αριθμό  $\left(\frac{z}{w}\right)^{2015}$ . Μονάδες 5

B<sub>2</sub>. Έστω για κάποιο μιγαδικό  $z \neq 0$  ισχύει  $|2z - i| = |z - 2i|$

α) Να αποδείξετε ότι  $|z| = 1$  και να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση  $|z - 6 - 5i|$  Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι  $w = z + \frac{1}{z}$  είναι πραγματικός. Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x + x$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Γ1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Μονάδες 3

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στην συνέχεια να αποδειχθεί ότι  $e^2 f(x) + 1 \geq 0$ . Μονάδες 6

**Γ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη κυρτότητα και στην συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο  $A(e, 2e)$  Μονάδες 6

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=e$ . Μονάδες 7

**Γ5.** Να βρεθούν οι ασυμπτωτες της συνάρτησης  $f$  Μονάδες 3

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Αν  $z = (e^x + 1) + (e^x + 3)i$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**A.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\sqrt{2}|z+2|}{z+\bar{z}}$  είναι η

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) \text{ και να βρείτε το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e^{f^{-1}(x)} x^2 - 3x + 2}$$

**B.** να λυθεί η εξίσωση  $(f \circ g)(x) + (e-1)f^{-1}(2) = \frac{3}{5}$  όπου  $g(x) = \ln x$

και στην συνέχεια το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x)) - \frac{5}{3}}{|3x-1|-5}$

Μονάδες 6+6

**Δ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

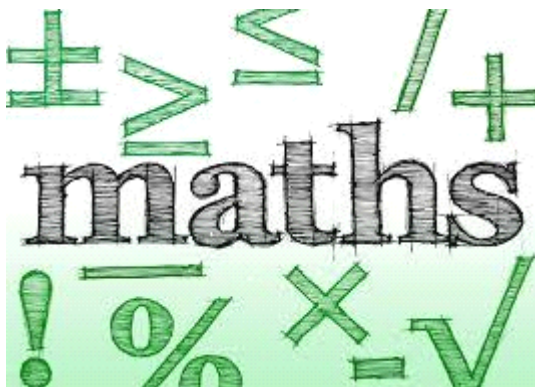
$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**A.** Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Μονάδες 3

**B.** Αν για τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\alpha = -1$ :

**i)** Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ . Μονάδες 5

**ii)** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ . Μονάδες 5



# ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ