

ΕΠΩΝΥΜΟ:

ΟΝΟΜΑ:

ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

05 / 01 / 2015

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να γράψετε τους ορισμούς :

α. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα

Μονάδες 4

β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

Μονάδες 4

B. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η $f'(x) = 1$

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστό** ή **Λάθος**

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = l^v$

2. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0

3. Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ τότε η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

4. Το κέντρο x_i της κλάσης $[\alpha, \beta)$ είναι $x_i = \beta - \alpha$

5. Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων που έχουν ταξινομηθεί σε αύξουσα σειρά, η διάμεσος είναι πάντοτε η μεσαία παρατήρηση.

6. Το διάγραμμα γίνεται μόνο για ποσοτικές διακριτές μεταβλητές

7. Το εμβαδό που σχηματίζει το πολύγωνο συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n

Μονάδες 7

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(4 - x^2)$ είναι το :

A. $A = [-2, 2]$

B. $A = (-2, 2)$

Γ. $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Δ. $A = \mathbb{R}$

2. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(2) = 0$ τότε στο σημείο $x_0 = 2$

A. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 2$

B. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

Γ. Η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 2$

Δ. Η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ στο $x_0 = 2$

3. Αν η γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 10)$ τότε ισχύει

A. $f'(\alpha) = 10$

B. $f(10) = \alpha$

Γ. $f(\alpha) = 10$

Δ. $f'(10) = \alpha$

4. Η διάμεσος των παρατηρήσεων $2, 0, 4, 4$ είναι ίση με

A. $\delta = 2$

B. $\delta = 3$

Γ. $\delta = 4$

Δ. $\delta = 0$

5. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{5}{x}$, $x \neq 0$ είναι ίση με :

A. $f'(x) = \frac{1}{5}$

B. $f'(x) = \frac{5}{x^2}$

Γ. $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$

Δ. $f'(x) = \frac{1}{5x^2}$

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + (3 - \alpha)x + \alpha + 2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης στα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(5, f(5))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(f'(x))^2}$

ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο που έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 4+4+6+6+5**ΘΕΜΑ 3**

Δίνονται οι παρατηρήσεις:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3$$

$$x_4 = 4, \quad x_5 = 6, \quad x_6 = 7$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των παρατηρήσεων x_i με $i = 1, 2, \dots, 6$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \delta x^2 + R x + \alpha$$

Όπου δ η διάμεσος και R το εύρος των παρατηρήσεων x_i με $i = 1, 2, \dots, 6$ και $\alpha > 18$.

i) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow CV} \frac{f''(x) + 6}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2}$, όπου CV ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων

$$x_i \text{ με } i = 1, 2, \dots, 6.$$

ii) Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε αν σε κάθε παρατήρηση x_i , με $i = 1, 2, \dots, 6$, προσθέσουμε το τοπικό ελάχιστο της f , τότε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4+7+7+7**ΘΕΜΑ 4**

Οι παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_n ακολουθούν την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι:

- το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από 8,
- το 47,5% των παρατηρήσεων ανήκουν στο διάστημα $(10, 14)$, του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $(\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x})$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 10$ και $s = 2$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι 50 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 14, να βρείτε πόσες παρατηρήσεις ανήκουν στο διάστημα (10, 12).

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \alpha x^2 + \beta x - 13$, όπου:

- α είναι η τιμή πάνω από την οποία βρίσκεται το 99,85% των παρατηρήσεων x_i ,
- β είναι η τιμή κάτω από την οποία βρίσκεται το 84% των παρατηρήσεων x_i .

i) Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν $\alpha=4$ και $\beta=12$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο

σημείο της $M(3, f(3))$.

iii) Θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$, με $i=1, 2, \dots, n$ της παραπάνω εφαπτομένης (ϵ). Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων y_i των παραπάνω σημείων.

Μονάδες 5+5+5+5+5

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ

ΓΕΜΑΤΗ ΜΕ ΟΝΕΙΡΑ

ΚΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ