σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05-01-15

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2. Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .Τι ονομάζουμε παράγουσα ή αρχική της f στο Δ

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1.Οι συναρτήσεις f και f' έχουν πάντα το ίδιο πεδίο ορισμού.

2. Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ρ_1 , ρ_2 δύο οποιεσδήποτε ρίζες της f στο Δ με $\rho_1<\rho_2$,τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\rho_1\ ,\rho_2)$

3. Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε για οποιοδήποτε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x_1)\bullet f(x_2)>0$

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_o

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_o τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{-1}{f(x)}\right]=+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$,συνεχής στο 3 για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{\eta\mu 2h}=\alpha\ ,\ \text{όπου}\ \ \alpha\in\mathrm{R}$$

Α) Να βρεθεί ότι $f(3)=0$

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

Γ) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(3,f(3))$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}(1,-8)$ τότε

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$

Γ2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)\bullet\sqrt{x-2}-f(x)}{x^2-6x+9}$

Δ) Αν $f(x)=x^2-3x$ να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\mathrm{A}=\int_0^{\pi} e^{\ln f'(x)}\bullet\sigma\upsilon\nu x\,dx \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\int_0^1\frac{f(2x)}{x}dx \quad \text{και} \quad \Gamma=\int_0^4\frac{2x-3}{\sqrt{f(x)}}dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+3+3+4

B2.Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|z-2-3i|^2+|\bar{z}i-3-6i|^2=16 \quad (1)$$

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

Β) Να βρείτε το μέτρο

$$|(4-3i)z-25|$$

Γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+3

ΘΕΜΑ Γ

Γ. Δίνονται οι f, g συναρτήσεις συνεχείς και ορισμένες στο $[1,2]$ και με τιμές στο $[1,2]$.

Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\left|\frac{5z}{12-9i}-\frac{5i}{3}\right|=1 \qquad (1).$$

Γ1. Να βρείτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος και να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο του z .

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε μιγαδικό z που ικανοποιεί τη σχέση (1) υπάρχει $\xi\in[1,2]$

τέτοιο ώστε $\qquad f(\xi)+g(\xi)=\dfrac{2|z|}{\xi^3}$ Μονάδες 5

Γ3. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ τότε να βρεθεί

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} και το σύνολο τιμών της $g(f(x))$
2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ ώστε
$$\frac{2f\left(\frac{5}{3}\right)+3f\left(\frac{3}{2}\right)}{5}=f(x_0)$$
3. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ ώστε $\quad f(g(\xi))+g(f(\xi))=\dfrac{3}{2}\xi$
4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln x\cdot f^{-1}(x)\right)$

Μονάδες 3+4+5+4

ΘΕΜΑ Δ

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[2,4]\to R$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Αν

$$f^2(2)+f^2(4)=2f(4)-4f(2)-5 \quad \text{τότε}$$

Α) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f

Β) Αν α,β,γ$\in(2,4)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(2,4)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$15f(\xi)=3f(\alpha)+5f(\beta)+7f(\gamma)$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση

$$f\left(f^{-1}\left(x^2+3x+3\right)-2\right)>-2$$

Δ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=f(x)+2if(x),\ x\in[2,4]$$

Δ1) Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .

Δ2) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\sqrt{45}\,|z|\cdot(x-\xi)}{|3f(\alpha)+5f(\beta)+7f(\gamma)|\cdot\eta\mu(x-\xi)}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+2+2+3+3

Β . Αν για τη συνεχή συνάρτηση f : $R\to R$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x)-4f(x)\bullet\eta\mu x=x^2+4\sigma\upsilon\nu^2 x \quad \text{για κάθε } x\in R$$

Επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη ίση με 2.
Να βρείτε

α) Τον τύπο της f.

β) Αν για κάθε $x\in R$ ορίζουμε $g(x)=f(x)-2=2\eta\mu x+\sqrt{x^2+4}-2$ να υπολογιστούν

β1) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

γ) Να λυθεί για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η ανίσωση

$$4\sqrt{x^2+4}\le\sqrt{\pi^2+64}-8\eta\mu x+4\sqrt{2}$$

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ η g έχει μοναδική ρίζα το 0 στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2})$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+2+2+4+4

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ ΜΕ ΥΓΕΙΑ
ΚΑΙ
ΜΕΓΑΛΟΥΣ ΣΤΟΧΟΥΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α