σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ &ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ:.....................................

ΟΝΟΜΑ:...

ΤΜΗΜΑ:...

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:...............................

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ 12/03/2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Παράγραφος 2.3 Σχολικού Βιβλίου

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \ \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \ \ \alpha < 0 \end{cases}$$

(ΜΟΝ. 5)

Α2. Παράγραφος 3.3 Σχολικού Βιβλίου

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \left(\beta^2 - 4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

(ΜΟΝ. 10)

Α3. Σωστό ή Λάθος

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Λ
5. Σ

(ΜΟΝ. 10)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1. $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$$

2. $$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)}{\sqrt{6}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{3\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)}{6-3}=\sqrt{12}-\sqrt{6}$$

(ΜΟΝ. 10)

Β2.

1. $4x^2-5x-6=0$

   Έχουμε $\Delta=(-5)^2-4\cdot4\cdot(-6)=25+96=121>0$

   Άρα $$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{121}}{2\cdot4}=\frac{5\pm11}{8}=\begin{cases}\dfrac{5+11}{8}=\dfrac{16}{8}=2\\[2mm]\dfrac{5-11}{8}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

2. $x^4-6x^2+8=0$

   Έστω $x^2=u$, τότε η αρχική εξίσωση γίνεται:

   $u^2-6u+8=0$

   Έχουμε $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4>0$

   Άρα $$u_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{6\pm2}{2}=\begin{cases}\dfrac{6+2}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\[2mm]\dfrac{6-2}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

   Δηλαδή: $x=\pm2$ ή $x=\pm\sqrt{2}$

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+10=0$

   Πρέπει $x\neq0$

   Θέτω $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=u$, τότε:

   $u^2-6u+10=0$

   Άρα έχουμε $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=36-40=-4<0$

   Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

(ΜΟΝ. 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $1<x<2$, άρα:

- $1<x<2 \Leftrightarrow -2<x-3<-1 \Leftrightarrow x-3<0$
- $1<x<2 \Leftrightarrow 2<2x<4 \Leftrightarrow 1<2x-1<3 \Leftrightarrow 2x-1>0$
- $1<x<2 \Leftrightarrow 5<x+4<6 \Leftrightarrow x+4>0$

Άρα:

$$\Pi = 2|x-3|+3x+4+|2x-1|-|x+4|$$
$$\Pi = 2(-x+3)+3x+4+2x-1-(x+4)$$
$$\Pi = -2x+6+3x+4+2x-1-x-4$$
$$\Pi = 2x+5$$

(ΜΟΝ. 8)

Γ2.

$$(\lambda x+1)^7+1=0 \Leftrightarrow (\lambda x+1)^7=-1 \Leftrightarrow \lambda x+1=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda x=-2$$

Άρα για $\lambda=0$ έχουμε: $0x=-2$ Αδύνατη

Και για $\lambda \neq 0$ έχουμε $x=\frac{-2}{\lambda}$

(ΜΟΝ. 8)

Γ3.

Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

$$\frac{3}{x+1} \le \frac{2}{x+1}-2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+1}+2\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2(x+1)}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+2x+2}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1}\le 0$$

Όμως

$$2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Άρα έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$
$2x+3$	-	+	+
$x+1$	-	-	+
Πηλίκο	+	-	+

Άρα $x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right)$

(ΜΟΝ. 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\alpha^2 < 3\beta$ και $\beta > 0$. Τότε για την εξίσωση $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ισχύει:

$\Delta = (-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta = \alpha^2 - 4\beta$.

Όμως: $\begin{cases} \alpha^2 < 3\beta \\ \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 3\beta < 0 \\ -\beta < 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

(ΜΟΝ. 8)

Δ2. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - (2\lambda + 1)x + (\lambda - 3) = 0$.

1.
$$\Delta = \left(-(2\lambda+1)\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\lambda - 3) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 8\lambda + 24 =$$
$$= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 24 = (2\lambda - 1)^2 + 24$$
2.
$$(2\lambda-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 + 24 \geq 24 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$$
Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες για κάθε τιμή του λ.
3. Έχουμε:
$$x_{1,2} = \frac{-\left(-(2\lambda+1)\right) \pm \sqrt{(2\lambda-1)^2 + 24}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\lambda + 1 + \sqrt{(2\lambda-1)^2 + 24}}{4} \\ x_2 = \dfrac{2\lambda + 1 - \sqrt{(2\lambda-1)^2 + 24}}{4} \end{cases}$$
4. Αν οι ρίζες διαφέρουν κατά λ έχουμε:

$$x_1 - x_2 = \lambda \Leftrightarrow \frac{2\lambda+1+\sqrt{(2\lambda-1)^2+24}}{4} - \frac{2\lambda+1-\sqrt{(2\lambda-1)^2+24}}{4} = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\lambda+1+\sqrt{(2\lambda-1)^2+24}-2\lambda-1+\sqrt{(2\lambda-1)^2+24}}{4} = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2\lambda-1)^2+24} = 2\lambda \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2+24 = 4\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+1+24-4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda+25=0 \Leftrightarrow 4\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{4}$$

(MON. 3+3+3+8)