ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

Επώνυμο: ____________________

Όνομα: ____________________

Τμήμα: ____________________

Ημερομηνία: ____________________

Α Βαθ.	Β Βαθ.	Μ.Ο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

12-03-2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=\dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

Ενδεικτική Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=(x-\beta)\left[f(x)-f(\alpha)\right]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$, άρα υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=\dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$.

Μονάδες 7

Β2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f'(x)-f(x)=2x-2$ με $f(0)=1$

α) Να δειχθεί ότι $f(x)=e^x-2x$, $x\in\mathbb{R}$

Ενδεικτική Λύση

$$f'(x)-f(x)=2x-2 \Leftrightarrow f'(x)+2=f(x)+2x \Leftrightarrow \left(f(x)+2x\right)'=f(x)+2x$$

Άρα $f(x)+2x=c\cdot e^x$ Για $x=0$ έχουμε $c=1$ Συνεπώς $f(x)=e^x-2x$

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο $+\infty$

Ενδεικτική Λύση

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=+\infty$$

Αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\text{Del}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$ άρα η f δεν δέχεται οριζόντια ασύμπτωτο στο $+\infty$

γ) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή την $\mu=2-\ln 4$

$f'(x)=\left(e^x-2x\right)'=e^x-2$

$e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$ Κατασκευάζουμε των πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0=\ln 2$ που είναι $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\cdot\ln 2=2-\ln 4$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ και την ευθεία $x = x_0$ όπου x_0 η θέση του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης f.

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο Α είναι

$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = -x \Leftrightarrow y = 1 - x$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_0^{\ln 2} \left| f(x) - (1-x) \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| e^x - x - 1 \right| dx$

Η συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$ έχει ρίζα $g(0) = 0$ και $g'(x) = e^x - 1$

Όταν $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ και έτσι όταν $x \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \ge 0$ και έχουμε

$$E(\Omega) = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - x - 1\right) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^{\ln 2} = 1 - \frac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2 \quad \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\cdot \ln x - 1$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

$f'(x) = \left((x-1)\cdot \ln x - 1\right)' = 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x$, παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$

$f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x} + \ln x\right)' = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και

Όταν $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ ενώ όταν $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Στο $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο που είναι $f(1)=-1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

Τότε $f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$ και $f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι

$f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Ενδεικτική Λύση

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow\ln\left(x^{x-1}\right)=\ln\left(e^{2013}\right)\Leftrightarrow(x-1)\cdot\ln x=2013\Leftrightarrow f(x)=2012$$

Αφού $2012\in f(\Delta_1)$ θα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=2012$ και επειδή η f είναι 1-1 στο Δ_1 η ρίζα $x_1>0$ θα είναι μοναδική

Αφού $2012\in f(\Delta_2)$ θα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=2012$ και επειδή η f είναι 1-1 στο Δ_2 η ρίζα $x_2>0$ θα είναι μοναδική

Συνεπώς η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Γ3. Αν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Ενδεικτική Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=e^x\cdot f(x)-2012\cdot e^x$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με

$$\Phi'(x)=e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)-2012\cdot e^x$$

$$\Phi(x_1)=e^{x_1}\cdot f(x_1)-2012\cdot e^{x_1}=0$$

$$\Phi(x_2)=e^{x_2}\cdot f(x_2)-2012\cdot e^{x_2}=0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε

$\Phi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

Ενδεικτική Λύση

$g(x) = f(x) + = (x-1)\cdot \ln x$

Η συνάρτηση g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x = 1$ άρα

$E(\Omega) = \int_1^e |g(x)|\,dx = \int_1^e |(x-1)\cdot \ln x|\,dx = \int_1^e ((x-1)\cdot \ln x)\,dx$ αφού στο διάστημα ολοκλήρωσης $x - 1 \geq 0$ και $\ln x \geq 0$

$$E(\Omega) = \int_1^e ((x-1)\cdot \ln x)\,dx = \int_1^e \left(\left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \cdot \ln x\right)dx \overset{\text{Κ.Π.}}{=} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$\frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{e^2}{4} - e - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Ενδεικτική Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x^2-1}\right)' = \dfrac{2\cdot(x^2-1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{2(x^2+1-x)}{(x^2-1)^2} < 0$ αφού το τριώνυμο $x^2 + 1 - x$ έχει $\Delta < 0$ άρα $x^2 + 1 - x > 0$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα

$\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 = (-1, 1)$ και $\Delta_3 = (1, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

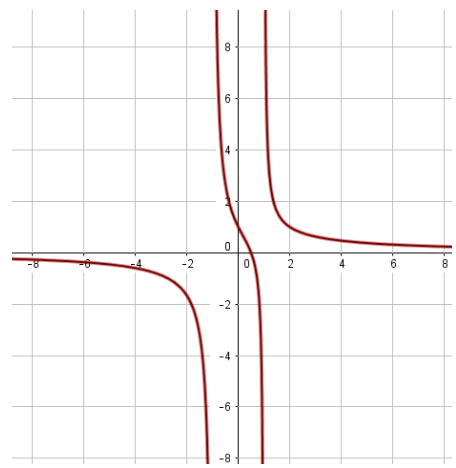
$$\left|\frac{ημx}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{ημx}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

Και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=0$

Συνεπώς αναζητούμε της ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

Υπολογίζουμε τα όρια σε κάθε σημείο του πίνακα μεταβολών της συνάρτησης

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	↘	↘	↘	



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x-1}{x^2-1}\overset{\frac{-3}{0^+}}{=}-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x-1}{x^2-1}\overset{\frac{-3}{0^-}}{=}+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x-1}{x^2-1}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-1}{x^2-1}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$$

Επειδή $\begin{cases}x^2-1>0 & , \quad x\to-1^-\\ x^2-1<0 & , \quad x\to-1^+\\ x^2-1<0 & , \quad x\to1^-\\ x^2-1>0 & , \quad x\to1^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Όταν $x\in\Delta_1$, $f(\Delta_1)=(-\infty,0)$ και $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα αφού $0\notin f(\Delta_1)$

Όταν $x \in \Delta_2$, $f(\Delta_2) = \mathbb{R}$ και αφού $0 \in f(\Delta_2)$ η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα επειδή είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο Δ_2

Όταν $x \in \Delta_3$, $f(\Delta_3) = (0, +\infty)$ και $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα αφού $0 \notin f(\Delta_3)$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι η δοσμένη εξίσωση έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(-1, 1)$

Δ3. Να δείξετε ότι $\frac{5}{8} < \int_{e^2}^{e^3} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx < 1$

Ενδεικτική Λύση

Θέτουμε $\ln x = \omega$

- Όταν $x = e^2$ είναι $\omega = 2$
- Όταν $x = e^3$ είναι $\omega = 3$
- Το νέο διαφορικό $\frac{1}{x}dx = d\omega$

Και η ανίσωση είναι ισοδύναμη με $\frac{5}{8} < \int_2^3 f(\omega)\,d\omega < 1$

Όμως $2 \le \omega \le 3$, $f \searrow$ άρα $f(2) \ge f(\omega) \ge f(3) \Leftrightarrow 1 \ge f(\omega) \ge \frac{5}{8}$

Η συνάρτηση $A(\omega) = 1 - f(\omega) \ge 0$ όμως δεν είναι παντού μηδέν αφού το ίσον ισχύει μόνο για $\omega = 2$ άρα $\int_2^3 A(\omega)\,d\omega > 0 \Leftrightarrow \int_2^3 1\,d\omega > \int_2^3 f(\omega)\,d\omega \Leftrightarrow \int_2^3 f(\omega)\,d\omega < 1$

Η συνάρτηση $B(\omega) = f(\omega) - \frac{5}{8} \ge 0$ όμως δεν είναι παντού μηδέν αφού το ίσον ισχύει μόνο για $\omega = 3$ άρα $\int_2^3 B(\omega)\,d\omega > 0 \Leftrightarrow \int_2^3 f(\omega)\,d\omega > \int_2^3 \frac{5}{8}\,d\omega \Leftrightarrow \int_2^3 f(\omega)\,d\omega > \frac{5}{8}$

Συνεπώς και $\frac{5}{8} < \int_2^3 f(\omega)\,d\omega < 1$ που είναι και το ζητούμενο

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 2$, $x = \lambda$, με $1 < \lambda < 2$

Ενδεικτική Λύση

$E(\lambda) = \int_\lambda^2 |f(x)|\,dx = \int_\lambda^2 \left|\frac{2x-1}{x^2-1}\right|dx$ Επειδή $1 < \lambda < 2$ και $f(\Delta_3) = (0, +\infty)$ θα είναι $f(x) > 0$ άρα

$$E(\lambda)=\int_{\lambda}^{2}\frac{2x-1}{x^2-1}\,dx$$ (το ολοκλήρωμα αυτό ανήκει στην κατηγορία A_2)

Αναζητούμε πραγματικού αριθμούς α, β ώστε

$$\frac{2x-1}{x^2-1}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}\Leftrightarrow 2x-1=(\alpha+\beta)x+\alpha-\beta \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

Έτσι θα πρέπει $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \text{και}\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ \beta=\frac{3}{2}\end{cases}$

Τότε $E(\lambda)=\int_{\lambda}^{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)\right]_{\lambda}^{2}+\frac{3}{2}\left[\ln(x+1)\right]_{\lambda}^{2}=$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)\right]_{\lambda}^{2}+\frac{3}{2}\left[\ln(x+1)\right]_{\lambda}^{2}=\frac{1}{2}\left(0-\ln(\lambda-1)\right)+\frac{3}{2}\left(\ln3-\ln(\lambda+1)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(\lambda-1)+\frac{3}{2}\ln3-\frac{3}{2}\ln(\lambda+1)$$ τ.μ.

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{\lambda\to1^+}\left(\ln(\lambda-1)^2+2\cdot E(\lambda)\right)$

Ενδεικτική Λύση

$$L=\lim_{\lambda\to1^+}\left(\ln(\lambda-1)^2-2\cdot E(\lambda)\right)=\lim_{\lambda\to1^+}\left\{\ln(\lambda-1)^2-\ln(\lambda-1)+3\ln3-3\ln(\lambda+1)\right\}$$

Εδώ έχουμε απροσδιοριστια $-\infty+\infty$ αλλά με χρήση της ιδιότητας των λογαρίθμων

$$L=\lim_{\lambda\to1^+}\left\{\ln(\lambda-1)+\ln27-\ln(\lambda+1)^3\right\}=-\infty+\ln27-\ln8=-\infty$$