

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΛ**

**12-03-2017**

**(ενδεικτικές λύσεις)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη σχολικό βιβλίο / σελ. 85

**A2.** α) Ορισμός σχολικό βιβλίο / σελ. 96

β) Ορισμός σχολικό βιβλίο / σελ. 97

**A3.** α)  $\rightarrow \Lambda$  β)  $\rightarrow \Lambda$  γ)  $\rightarrow \Sigma$  δ)  $\rightarrow \Lambda$  ε)  $\rightarrow \Lambda$

**ΘΕΜΑ Β**

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

**B1.** Πρέπει  $x^2 + 1 > 0$ , ισχύει. Άρα  $A = \mathbb{R}$

$$\mathbf{B2.} \quad f'(x) = \left( \sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**B3.**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Η  $f$  παρουσιάζει για  $x = 0$  ολικό ελάχιστο, το  $f(0) = 1$

**B4.** Τα  $2016, 2017 \in (0, +\infty)$

Η  $f \nearrow (0, +\infty)$

Άρα  $2016 < 2017 \Rightarrow f(2016) < f(2017)$

**B5.**

$$f''(x) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{(x)' \sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} xf'(x) + (x^2+1)f''(x) + \frac{2016}{\sqrt{x^2+1}} &= x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \cancel{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x^2+1)}\sqrt{x^2+1}} + \frac{2016}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2016}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+2017}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4} & , x \neq 2 \\ \frac{\alpha^2}{2} + \alpha & , x = 2 \end{cases}$

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{2\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2} = \frac{3}{2}$

**β)** Πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -3$

**Γ2.** Έστω  $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$  η εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο επαφής  $M(x_0, f(x_0))$ .

Πρέπει  $\varepsilon // \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda = 1$

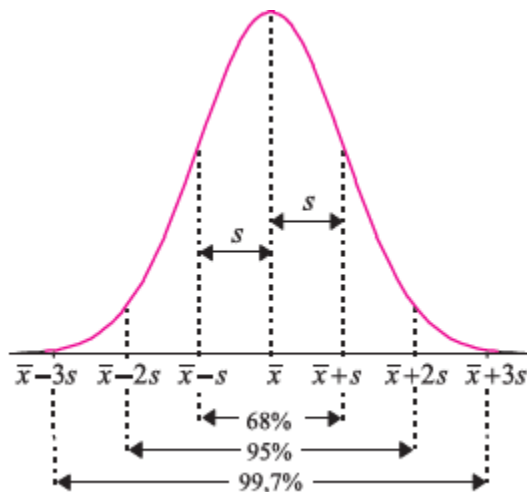
Όμως  $\lambda = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow 2x_0 - 3 = 1 \Rightarrow x_0 = 2$

Άρα  $M(2, f(2))$  ή  $M(2, -1)$

Το  $M(2, -1) \in \varepsilon \Rightarrow y_M = x_M + \beta \Rightarrow -1 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = -3$

Άρα  $\varepsilon : y = x - 3$

**Γ3.**



$$\bar{x} = 12 \text{ και } s^2 = 9 \Rightarrow s = 3$$

α) Κάτω από 9 έχουν  $0,15\% + 2,35\% + 13,5\% = 16\%$

β) Τουλάχιστον 18 έχουν  $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$

γ) Μεταξύ 9 και 18 έχουν  $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i \cdot v_i$	$x_i \cdot v_i^2$
$[0,4)$	2	4	4	0,16	0,16	8	32
$[4,8)$	6	3	7	0,12	0,28	18	54
$[8,12)$	10	6	13	0,24	0,52	60	360
$[12,16)$	14	7	20	0,28	0,80	98	686
$[16,20)$	18	5	25	0,20	1	90	450
Σύνολο	-	25	-	1	-	274	1582

$$\Delta 2. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{274}{25} = 10,96 \approx 11$$

**Δ3.**  $14\% + 20\% = 34\%$

**Δ4.**

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{n} = \\ &= \frac{(2-11)^2 \cdot 4 + (6-11)^2 \cdot 3 + (10-11)^2 \cdot 6 + (14-11)^2 \cdot 7 + (18-11)^2 \cdot 5}{25} = \\ &= \frac{324 + 75 + 6 + 63 + 245}{25} = \frac{713}{25} = 28,52 \end{aligned}$$

Άρα τυπική απόκλιση  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{28,52} \approx 5,34$

**Δ5.**

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{5,34}{11} \cdot 100\% = 48,5\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.