ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:. . . . .

Α Βαθ.	Β Βαθ.	Μ.Ο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΗΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

12-03-2017

Ενδεικτικές Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) **Σ**

β) **Λ**

γ) **Λ**

δ) **Λ**

ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β. Δίνονται οι εξισώσεις

(1) $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+\lambda^2-1=0$ και

(2) $\lambda x+(2-\lambda)y+\lambda+4=0$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία

Ενδεικτική Λύση

Το τριώνυμο $A = \lambda^2 + \lambda - 2$ έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $\dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = -2 \end{cases}$

Το τριώνυμο $B = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $\dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Για να είναι η εξίσωση (1) ευθεία θα πρέπει $\lambda \neq 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$

Ενδεικτική Λύση

Για να είναι η ευθεία (1) παράλληλη στον άξονα $x'x$ πρέπει $A = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Ενδεικτική Λύση

$\Gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Για να διέρχεται η ευθεία (1) από την αρχή των αξόνων πρέπει $\lambda = -1$

δ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι (1) και (2) να παριστάνουν παράλληλες ευθείες

Ενδεικτική Λύση

Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2, -\lambda^2 - \lambda + 2\right)$ το οποίο είναι παράλληλο στην ευθεία (1)

και διάνυσμα $\vec{\beta} = (2 - \lambda, -\lambda)$ το οποίο είναι παράλληλο στην ευθεία (2)

για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & -\lambda^2 - \lambda + 2 \\ 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)\cdot(-\lambda) - \left(-\lambda^2 - \lambda + 2\right)\cdot(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

-1	2	1	-2	
$\downarrow$	-1	1	2	1
-1	1	2	0	

$\lambda = 1$ (απορρίπτεται)

ή

$-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ η οποία έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $\dfrac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \lambda = -1 \\ \text{ή} \\ \lambda = 2 \end{cases}$

ε. Για $\lambda = -1$ να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των (1) και (2)

Ενδεικτική Λύση

Όταν $\lambda = -1$ έχουμε τις ευθείες

$(\varepsilon_1): -2x + 6y = 0 \Leftrightarrow -x + 3y = 0$ και $(\varepsilon_2): -x + 3y + 3 = 0$

Ένα τυχαίο σημείο A της (ε_1) είναι το σημείο $A(0,0)$

Ένα τυχαίο σημείο B της (ε_2): για $x = 0$ υπολογίζουμε $y = -1$ άρα $B(0,-1)$

Το μέσο του AB είναι το σημείο $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ δηλαδή το σημείο $M\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Αν η ζητούμενη μεσοπαράλληλος είναι η ευθεία $(\varepsilon): -x + 3y + \kappa = 0$ θα πρέπει να την επαληθεύει το σημείο M, άρα $0 + 3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = \dfrac{3}{2}$

Και η ζητούμενη ευθεία είναι η $(\varepsilon): -x + 3y + \dfrac{3}{2} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \mu \cdot x - 6$ και $(\varepsilon_2): 4y = (\mu - 4) \cdot x + 16$ οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους

α. Να αποδείξετε ότι $\mu = 2$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-1, -\mu)$ το οποίο είναι παράλληλο στην ευθεία (1)

και διάνυσμα $\vec{\beta} = (-4, 4 - \mu)$ το οποίο είναι παράλληλο στην ευθεία (2)

αφού οι ευθείες είναι κάθετες θα είναι

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\mu + \mu^2 = 0 \Leftrightarrow (\mu - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Άρα οι ευθείες έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1): y = 2 \cdot x - 6$$

$$(\varepsilon_2): 4y = -2 \cdot x + 16 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$$

β. Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1), (ε_2)

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Για να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών επιλύουμε το σύστημα που σχηματίζεται από τις εξισώσεις των ευθειών:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot x - 6 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \end{cases}, \quad 2x - 6 = -\frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4 \text{ τότε } y = 8 - 6 = 2$$ άρα το

σημείο τομής τους είναι το $\Gamma(4,2)$

γ. Δίνεται επίσης η ευθεία $(\varepsilon_3): y = (\kappa - 7) \cdot x + \kappa$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(4,2)$. Τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 6$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Το σημείο Α επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας (ε_3) άρα $2=(\kappa-7)\cdot 4+\kappa \Leftrightarrow 30=5\kappa \Leftrightarrow \kappa=6$

ii. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε_3) με τον άξονα $x'x$

Ενδεικτική Λύση

Η ευθεία (ε_3) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-1$ άρα, αν ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ θα είναι $\varepsilon\varphi\omega=-1$ και $\hat{\omega}=135^o$

Γ2. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=\sqrt{3}\cdot x+2$ και το σημείο $A(2,3)$. Να βρεθεί ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο Α και σχηματίζει με την ευθεία (ε) οξεία γωνία ίση με $\frac{\pi}{6}$

Ενδεικτική Λύση

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,-\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ε) και έχει μέτρο $|\vec{\alpha}|=\sqrt{1+3}=2$

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α είναι οι ευθείες $y-3=\lambda\cdot(x-2)$ και η κατακόρυφη $x=2$

- Εξετάζουμε αν η κατακόρυφη $(\zeta): x=2$ αποτελεί λύση του προβλήματος

Το διάνυσμα $\vec{\beta}=(0,-1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ζ) και έχει μέτρο $|\vec{\beta}|=\sqrt{0+1}=1$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-1)\cdot 0+(-1)\cdot(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$

Το συνημίτονο της γωνίας των ευθειών (ε) και (ζ) είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα η γωνία είναι $\frac{\pi}{6}$ και η κατακόρυφη $x=2$, αποτελεί λύση του προβλήματος

- Τώρα θα αναζητήσουμε από τις ευθείες

  $(\zeta): y-3=\lambda\cdot(x-2) \Leftrightarrow \lambda x - y + 3 - 2\lambda = 0$ αν υπάρχει ευθεία που να ικανοποιεί το πρόβλημα.

Το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-1,-\lambda)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ζ) και έχει μέτρο $|\vec{\beta}|=\sqrt{1+\lambda^2}$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-1)\cdot(-1)+(-\lambda)\cdot(-\sqrt{3})=1+\lambda\sqrt{3}$

Εφόσον η γωνία είναι $\frac{\pi}{6}$ θα ισχύει $\text{συν}\frac{\pi}{6}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\lambda\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{\lambda^2+1}}$

Η εξίσωση για να έχει νόημα, θα πρέπει $1+\lambda\sqrt{3}>0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\lambda\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{\lambda^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}=\lambda\sqrt{3}+1$ υψώνουμε στο τετράγωνο

$3\lambda^2+3=3\lambda^2+2\lambda\sqrt{3}+1 \Leftrightarrow 2\lambda\sqrt{3}=2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$ δεκτή

Και η ευθεία (ζ) γίνεται $\frac{1}{\sqrt{3}}x-y+3-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{3}\cdot y+3\sqrt{3}-2=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο $K(-1,3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε το σημείο Κ να είναι το μέσο του ΑΒ. Επιπλέον δίνονται τα σημεία $\Gamma(-5,1)$ και $\Delta(2\mu-7,5-4\mu)$ ώστε το Δ είναι σημείο της ευθείας (ε_1). Τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι $y=3x+6$

Ενδεικτική Λύση

Εφόσον η ευθεία τέμνει τους άξονες δεν είναι ούτε κατακόρυφη ούτε οριζόντια

Αναζητούμε την ευθεία $y-3=\lambda\cdot(x+1)$ με $\lambda\neq 0$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0$ και έχουμε

$-3=\lambda\cdot(x+1) \Leftrightarrow x=\frac{-\lambda-3}{\lambda}$ άρα $A\left(\frac{-\lambda-3}{\lambda},0\right)$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$ θέτουμε $x=0$ και έχουμε $y-3=\lambda \Leftrightarrow y=\lambda+3$ άρα $B(0,1+3)$

Και θα πρέπει να ισχύουν $\begin{cases} \dfrac{\frac{-\lambda-3}{\lambda}+0}{2}=-1 \\ \text{και} \\ \dfrac{0+\lambda+3}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=3$

Έτσι έχουμε την ευθεία $(\varepsilon_1): y-3=3\cdot(x+1) \Leftrightarrow y=3x+6$

β. Να αποδείξετε ότι $\mu=2$

Ενδεικτική Λύση

Το σημείο Δ επαληθεύει την εξίσωση της (ε_1) άρα

$5-4\mu=3(2\mu-7)+6 \Leftrightarrow 10\mu=20 \Leftrightarrow \mu=2$

γ. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ είναι η ευθεία $(\varepsilon_2): x-2y+2=0$

Ενδεικτική Λύση

Το σημείο Δ είναι το σημείο $\Delta(-3,-3)$

$\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{-3-1}{-3-(-5)}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Η μεσοκάθετος θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{1}{2}$

Το μέσο του ΓΔ είναι το σημείο $M\left(\dfrac{-5-3}{2},\dfrac{1-3}{2}\right)$ δηλαδή $M(-4,-1)$

Και η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα είναι

$y+1=\dfrac{1}{2}(x+4) \Leftrightarrow 2y+2=x+4 \Leftrightarrow x-2y+2=0$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Ενδεικτική Λύση

Οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$, $\Gamma(-5,1)$

$\vec{\mathrm{AB}}=(2,6)$, $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=(-3,1)$, $\det\left(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2+18=20$

Και $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|=\frac{20}{2}=10$ τ.μ.

ε. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Β από την ευθεία (ε_2)

Ενδεικτική Λύση

Η απόσταση του $\mathrm{B}(0,6)$ από την $(\varepsilon_2): x-2y+2=0$

Είναι $d(\mathrm{B},\varepsilon_2)=\frac{|0-12+2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$