ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594

ΑΡΤΑΚΗΣ 12 Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422

www.syghrono.gr

Επώνυμο: ____________________

Όνομα: ____________________

Τμήμα: ____________________

Ημερομηνία: ____________________

Α Βαθ.	Β Βαθ.	Μ.Ο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
12-03-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: «Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

β) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή μ

δ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0$

ε) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=\dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

Μονάδες 7

Β2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f'(x)-f(x)=2x-2$ με $f(0)=1$

α) Να δειχθεί ότι $f(x)=e^x-2x$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο $+\infty$

Μονάδες 3

γ) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή την $\mu=2-\ln 4$

Μονάδες 3

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ και την ευθεία $x=x_0$ όπου x_0 η θέση του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot\ln x-1$, $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι $\dfrac{5}{8} < \displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \dfrac{f(\ln x)}{x}\,dx < 1$

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 2$, $x = \lambda$, με $1 < \lambda < 2$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $L = \lim\limits_{\lambda \to 1^+} \left(\ln(\lambda - 1)^2 + 2 \cdot E(\lambda) \right)$

Μονάδες 4

Ευχόμαστε Επιτυχία !!!