σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ &ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ:....................................

ΟΝΟΜΑ:..

ΤΜΗΜΑ:..

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:..............................

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ 19/02/2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Να δώσετε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α.

Απάντηση

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[(1)] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

(Σελ. 70 του σχολικού βιβλίου)

(ΜΟΝ. 5)

Α2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ γράφεται ισοδύναμα στην μορφή $x^2-Sx+P=0$.

Απόδειξη

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0\end{aligned}$$

(Σελ. 90 του σχολικού βιβλίου)

(ΜΟΝ. 10)

Α3.

Σωστό ή Λάθος

1. Η ανίσωση $|x-5|<-1$ είναι αδύνατη. **Σ**
2. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει μία ρίζα αν $\Delta=0$. **Σ**
3. Η ισότητα $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ ισχύει όταν $\alpha\bullet\beta\geq 0$. **Σ**
4. Αν $x>-3$ τότε $|x+3|=-x-3$. **Σ**
5. Αν $|a^2-1|+|a+1|=0$ τότε το $a=1$. **Σ**

(ΜΟΝ. 10)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}$.

1. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Α;

   <u>Λύση</u>

   Πρέπει $x\neq 0$ και $x^2-\dfrac{1}{x}\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{x^3-1}{x}\neq 0\Leftrightarrow x^3-1\neq 0\Leftrightarrow x^3\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1$

   Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

   <u>Λύση</u>

   $$A=\frac{x-\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^3-1}{x}}=\frac{\cancel{x}\left(x^2-1\right)}{\cancel{x}\left(x^3-1\right)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)}$$

3. Να λύσετε την εξίσωση Α=1.

   <u>Λύση</u>

   $$A=1\Leftrightarrow\frac{(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)}=1\Leftrightarrow\cancel{x}+\cancel{1}=x^2+\cancel{x}+\cancel{1}\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

   Απορρίπτεται λόγω περιορισμών, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

(ΜΟΝ. 15)

B2.

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^2 + x - 6 = 0$

   <u>Λύση</u>

   Έχουμε: $\Delta = 1^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$, άρα:

   $$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \bullet 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

   Άρα οι λύσεις τις εξίσωσης είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$

2. $9x^2 + 18x + 5 = 0$

   <u>Λύση</u>

   Έχουμε: $\Delta = 18^2 - 4 \bullet 9 \bullet 5 = 324 - 180 = 144 > 0$, άρα:

   $$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{144}}{2 \bullet 9} = \frac{-18 \pm 12}{18} = \begin{cases} \dfrac{-18+12}{18} = \dfrac{-6}{18} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-18-12}{18} = \dfrac{-30}{18} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

   Άρα οι λύσεις τις εξίσωσης είναι $x_1 = -\frac{1}{3}$ και $x_2 = -\frac{5}{3}$

3. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2 - x}$

   <u>Λύση</u>

   Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

   Άρα η εξίσωση ορίζεται για $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

   $$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x(x-1)\frac{x}{x-1} = x(x-1)\frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \text{Απορ.} \\ x = 1 \end{cases}$$

   Άρα μοναδική λύση της εξίσωσης είναι το $x = 1$.

(ΜΟΝ. 3+3+4)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-2|x|-3=0$

<u>Λύση</u>

Θέτω $|x|=\omega$ τότε:

$$x^2-2|x|-3=0 \Leftrightarrow \omega^2-2\omega-3=0$$

Άρα: $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$

Δηλαδή: $\omega_{1,2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+4}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\ \dfrac{4-4}{2}=\dfrac{0}{2}=0\end{cases}$

Άρα αν $\omega_1=4 \Leftrightarrow |x|=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Αν $\omega_2=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=-2, x=0, x=2$

(ΜΟΝ. 5)

Γ2.

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{x+4}{2x-2}=\dfrac{3x^2+38}{x^2-1}$

<u>Λύση</u>

$$\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2(x-1)}=\frac{3x^2-38}{(x-1)(x+1)}$$

Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα:

$$2(x-1)(x+1)\frac{7}{(x+1)}+2(x-1)(x+1)\frac{(x+4)}{2(x-1)}=2(x-1)(x+1)\frac{(3x^2+38)}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14(x-1)+(x+1)(x+4)=2(3x^2+38) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x-14+x^2+5x+4=6x^2+76 \Leftrightarrow 5x^2-19x+86=0$$

Όμως: $\Delta = (-19)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 86 = 361 - 1720 = -1359 < 0$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

(ΜΟΝ. 10)

Γ3.

Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση: $|x-2| - x - 2|x-1|$.

Λύση

Έχω: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα:

x	$-\infty$	1	2 $\quad +\infty$
$x-2$	-	-	+
$x-1$	-	+	+

- Άρα για $x < 1$είναι: $|x-2| - x - 2|x-1| = -x + 2 - x + 2x - 2 = 0$
- Για $1 \le x < 2$ είναι: $|x-2| - x - 2|x-1| = -x + 2 - x - 2x + 1 = -4x + 3$
- Για $x \ge 2$ είναι: $|x-2| - x - 2|x-1| = x - 2 - x - 2x + 2 = -2x$

(ΜΟΝ. 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Να λυθεί η ανίσωση: $3 < |x-1| < 4$.

Λύση

Θα ψάξουμε να δούμε που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$|x-1| > 3$ και $|x-1| < 4$

Όμως:

$$|x-1|>3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>3 \\ x-1<-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<-2 \end{cases}$$

Και

$$|x-1|<4 \Leftrightarrow -4<x-1<4 \Leftrightarrow -3<x<5$$

Άρα πρέπει $x \in (-3,-2) \cup (4,5)$

(ΜΟΝ. 5)

Δ2.

Να βρεθεί ένας διψήφιος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε το ψηφίο των μονάδων του να είναι κατά ένα μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων του και αν διαιρεθεί με το γινόμενο των ψηφίων του, να δίνει πηλίκο ίσο με 6 και υπόλοιπο 0.

Λύση

Έστω x ο αριθμός που ψάχνουμε και m ο αριθμός των μονάδων και d ο αριθμός των δεκάδων. Τότε: $x=10d+m$ με d,m να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Επίσης πρέπει $m=d+1$ και $\frac{x}{md}=6$.

Άρα:

$$\frac{x}{md}=6 \Leftrightarrow \frac{10d+m}{md}=6 \Leftrightarrow \frac{10d+d+1}{(d+1)d}=6 \Leftrightarrow 11d+1=6d(d+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11d+1=6d^2+6d \Leftrightarrow 6d^2-5d-1=0$$

Όπου:

$$\Delta=(-5)^2-4 \cdot 6 \cdot (-1)=25+24=49>0$$

$$d_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\bullet 6}=\frac{5\pm 7}{12}=\begin{cases}\dfrac{12}{12}=1\\ \dfrac{-2}{12}=-\dfrac{1}{6},\ \text{Απορρίπτεται}\end{cases}$$

Άρα $d=1$ και $m=d+1=2$

Άρα ο αριθμός που ψάχνουμε είναι: $x=10d+m=10\bullet 1+2=12$

(ΜΟΝ. 8)

Δ3.

Αν $1<x<2$, να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$A=\frac{|3x-1|-5x-3}{4+6x-x|2-x|-|4-x^2|}$$

Λύση

Αρχικά έχουμε:

$1<x<2 \Leftrightarrow 3<3x<6 \Leftrightarrow 2<3x-1<5$

$1<x<2 \Leftrightarrow -2<-x<-1 \Leftrightarrow 0<2-x<1$

$1<x<2 \Leftrightarrow 1<x^2<4 \Leftrightarrow -4<-x^2<-1 \Leftrightarrow 0<4-x^2<3$

Άρα:

$$A=\frac{|3x-1|+-5x-3}{4+6x-x|2-x|-|4-x^2|}=\frac{3x-1-5x-3}{4+6x-2x+x^2-4+x^2}=\frac{-2x-4}{2x^2+4x}\Leftrightarrow$$

$$A=\frac{-2(x+2)}{2x(x+2)}\Leftrightarrow A=-\frac{1}{x}$$

(ΜΟΝ. 5)

Δ4.

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x+3\right)^2+\left|x+3\right|-2=0$$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε: $\left|x+3\right|=\omega$ τότε:

$\left(x+3\right)^2+\left|x+3\right|-2=0 \Leftrightarrow \omega^2+\omega-2=0$

Όπου: $\Delta=1+8=9>0$

Δηλαδή: $\omega_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{2}{2}=1\\ \dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$

Άρα: $\left|x+3\right|=1$ ή $\left|x+3\right|=-2$ Απορρίπτεται.

Άρα $\left|x+3\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x+3=1\\ x+3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=-4\end{cases}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

(ΜΟΝ. 7)