σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 19/02/17

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Απόδειξη σελίδα 134

Α2. Θεωρία

Α3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \eta\mu\pi\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu\pi\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu\frac{\pi}{2}\eta\mu 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0 \bullet \sigma\upsilon\nu 3x - (-1)\eta\mu 3x + 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 3x + 1 \cdot \eta\mu 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 2\eta\mu 3x$

β) $\omega = 3$ άρα $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$, $f_{max} = \rho = 2$, $f_{min} = -\rho = -2$

Β2.

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\cancel{\eta\mu x}\left(1\cancel{+\sigma\upsilon\nu x}+1\cancel{-\sigma\upsilon\nu x}\right)}{\eta\mu^{\cancel{2}} x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

Β3. α) Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, έχουμε:

$2\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

β) Έχουμε:

$$2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\eta\mu x\Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x\left(2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=0 \quad \acute{\eta} \quad 2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=0 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi \quad \acute{\eta} \quad x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}, \qquad \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Για $\frac{(\lambda-1)(\lambda-5)}{-3}\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 5$ το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού.
- Για $\lambda=1$ έχουμε με αντικατάσταση ότι:

$$P(x)=(1-5)x^2+x+(1-2)\Leftrightarrow P(x)=-4x^2+x-1, \text{ άρα } 2^{ου} \text{ βαθμού}$$

- Για $\lambda=5$ έχουμε με αντικατάσταση ότι:

$$P(x)=(5-5)x^2+5x+(5-2)\Leftrightarrow P(x)=5x+3, \text{ άρα } 1^{ου} \text{ βαθμού}$$

Γ2. α) Είναι $P(1)=0\Leftrightarrow \alpha+\beta-1-3-2\beta+6=0\Leftrightarrow \alpha-\beta=-2 \quad (1)$ και

$$P(-1)=2\Leftrightarrow -\alpha+\beta-1+3-2\beta+6=2\Leftrightarrow -\alpha-\beta=-6 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) προκύπτει ότι:

$$\begin{cases}\alpha-\beta=-2\\ -\alpha-\beta=-6\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}-2\beta=-8\Rightarrow\beta=4 \text{ κι άρα } \alpha=-2+4=2$$

β) Για τις τιμές των α, β που βρήκαμε, αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο P(x) έχουμε ότι:

$$P(x)=2x^3+3x^2-3x-8+6\Rightarrow P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$$

Αν δίνεται το πολυώνυμο:

$$Q(x)=\left(\lambda^2-2\right)x^3+\left(\lambda^2-3\lambda+5\right)x^2-\left(4\lambda+\mu\right)\cdot x+\mu+3$$

για να είναι ίσα τα δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ θα πρέπει όλοι οι αντίστοιχοι όροι τους να είναι ίσοι, δηλαδή οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων να είναι ίσοι. Επομένως, θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2-2=2\\ \lambda^2-3\lambda+5=3\\ -(4\lambda+\mu)=-3\\ \mu+3=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2=4\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\\ 4\lambda+\mu=3\\ \mu=-5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\lambda=\pm2\\ \lambda=1 \quad ή \quad \lambda=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=2\\ \begin{cases}4\lambda+\mu=3\\ \mu=-5\end{cases}\\ \mu=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\lambda=\pm2\\ \lambda=1 \quad ή \quad \lambda=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=2\\ \begin{cases}4\lambda-5=3\\ \mu=-5\end{cases}\\ \mu=-5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\lambda=\pm2\\ \lambda=1 \quad ή \quad \lambda=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=2\\ \begin{cases}\lambda=2\\ \mu=-5\end{cases}\\ \mu=-5\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2,\ \mu=-5$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) P(1)=0 και $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Από την επίλυση του συστήματος έχουμε ότι

$εφα=\frac{1}{4}$ και $εφβ=\frac{1}{3}$

β) Είναι $εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}=\frac{8}{15}$,οπότε $εφ\left(2α-β\right)=\frac{εφ2α-εφβ}{1-+εφ2α\cdot εφβ}=\frac{9}{53}$.

Δ2. α) Από τη ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x^2-4 έχουμε:

$$P(x)=\left(x^2-4\right)\cdot\pi(x)+3x-2 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-2$ είναι ίσο με $P(2)$ και ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x+2$ είναι ίσο με $P(-2)$.

Από την (1) με αντικατάσταση όπου $x=2$ και $x=-2$ βρίσκουμε ότι $P(2)=4$ και $P(-2)=-8$.

β) Είναι

$$\begin{cases} P(2)=4 \\ P(-2)=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 2^3-2\alpha+\beta=4 \\ 2\cdot(-2)^3+2\alpha+\beta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-2\alpha+\beta=4 \\ -16+2\alpha+\beta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta=-12 \\ 2\alpha+\beta=8 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow 2\beta=-4 \Leftrightarrow \beta=-2$ και επομένως $\alpha=5$

γ) $\pi(x)=2x$