ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ:.........................

ΟΝΟΜΑ:...........................

ΤΜΗΜΑ:...........................

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....................

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

19-02-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ 28

Μονάδες 10

Α2. Ορισμός σελ 13

Μονάδες 5

Α3. Σωστό(Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

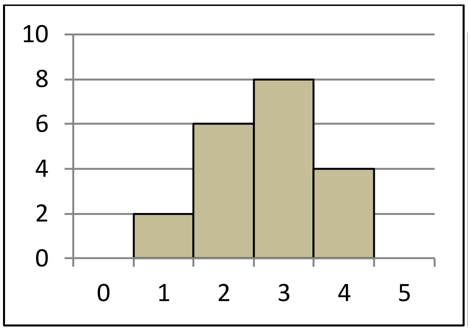
Ρωτήσαμε 20 μαθητές πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασαν στις καλοκαιρινές τους διακοπές. Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

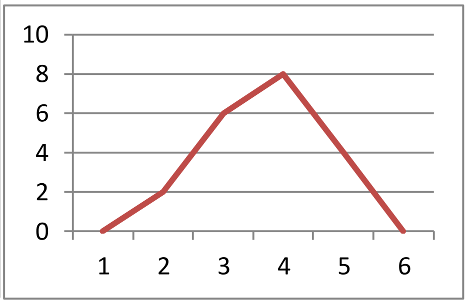
Β1.

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i
1	2	2	0,10	0,10
2	6	8	0,30	0,40
3	8	16	0,40	0,80
4	4	20	0,20	1,00
Σύνολο	20	-	1,00	-

Μονάδες 9

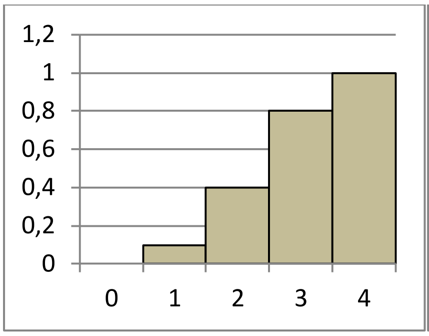
Β2.

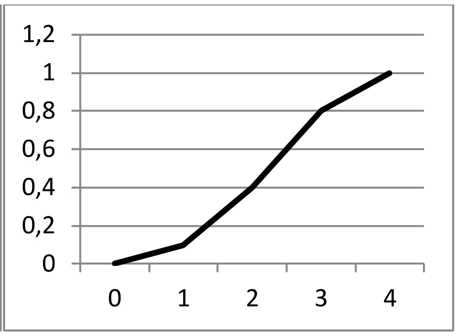




Μονάδες 3

Β3.





Μονάδες 3

Β4. 2+6=8 μαθητές

Μονάδες 5

Β5. 40%+20%=60% των μαθητών

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. $f(1)=2\sqrt{1^2-1+1}-1=2-1=1$

Μονάδες 4

Γ2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{1-1+1}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

Μονάδες 10

Γ3. Γνωρίζουμε ότι $f(1)=1$. Επίσης

$$f(1+h)=2\sqrt{(1+h)^2-1-h+1}-1=2\sqrt{1+2h+h^2-h}-1=2\sqrt{1+h+h^2}-1$$

Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\mathrm{h})-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{1+h+h^2}-1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{1+h+h^2}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+h+h^2}-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+h+h^2}-1\right)\left(\sqrt{1+h+h^2}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h+h^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\cancel{1}+h+h^2-\cancel{1}\right)}{h\left(\sqrt{1+h+h^2}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}(1+h)}{\cancel{h}\left(\sqrt{1+h+h^2}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)}{\left(\sqrt{1+h+h^2}+1\right)}=$$

$$=\frac{2(1+0)}{\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}=\frac{2}{2}=1\in\mathbb{R}$$

Άρα: $f'(1)=1$

Μονάδες 4

Γ4.

Η εφαπτομένη έχει την μορφή $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=f'(1)=1$. Για να υπολογίσουμε το β βάζουμε όπου $y=f(1)=1$ και $x=1$, άρα έχουμε:

$$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow 1=1\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=0$$

Άρα η εφαπτομένη δίνεται από την ευθεία $y=x$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+9x+1$ με $x\in\mathbb{R}$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ1)

$$f'(x)=\left(\kappa x^3+\lambda x^2+9x+1\right)'=3\kappa x^2+2\lambda x+9$$

Μονάδες 4

Δ2)

Για να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$ και $x_2=3$ πρέπει να αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης εκεί. Δηλαδή να αλλάζει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου. Άρα πρέπει $f'(1)=0$ και $f'(3)=0$.

Άρα

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa+2\lambda+9=0 \\ 27\kappa+6\lambda+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa+2\lambda+9=0 \\ -9\kappa-2\lambda-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa+2\lambda+9=0 \\ -6\kappa+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda=-12 \\ \kappa=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-6 \\ \kappa=1 \end{cases}$$

Μονάδες 7

Δ3) Αν $\kappa=1$ και λ=-6, τότε $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ και $f'(x)=3x^2-12x+9$. Άρα έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (\text{απο ερώτημα Δ2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9<0 \Leftrightarrow x\in(1,3)$$

Άρα

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η συνάρτηση $f:\nearrow$ στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(3,+\infty)$

Η συνάρτηση $f:\searrow$ στο $(1,3)$. Και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x_1=1$ την τιμή

$f(1)=1-6+9+1=5$ και τοπικό ελάχιστο για $x_2=3$ την τιμή

$f(3)=27-54+27+1=1$.

Μονάδες 8

Δ4) Έστω $y=\lambda x+\beta$ οι εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην

$y=-3x+15$. Τότε, επειδή $f'(x_o)=\lambda$, για να είναι παράλληλες πρέπει

$f'(x_o)=-3 \Leftrightarrow 3x_o^2-12x_o+9=-3 \Leftrightarrow 3x_o^2-12x_o+12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_o^2-4x_o+4=0 \Leftrightarrow (x_o-2)^2=0 \Leftrightarrow x_o=2$

Άρα η μοναδική εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y=-3x+15$ είναι για

$x_o=2$. Έχουμε: $f(2)=8-24+18+1=3$. Άρα:

$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow 3=-3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=9$.

Άρα η εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y=-3x+15$ είναι η $y=-3x+9$

Μονάδες 6