ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Τσιμισκή 47 & Καρόλου Ντήλ τηλ/fax. 2310270727
Αρτάκης 12 τηλ/fax. 2310919113
http://www.syghrono.gr

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Διαγωνίσματος 19/2/2017
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Θέμα Α1, Α2 θεωρία σχολικού βιβλίου
Θέμα Α3 Ερωτήσεις Σ-Λ

α) Σ
β) Λ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

Θέμα Β1α

Αν $a=\int_0^1 f(x)\,dx$ τότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x)=3x^2+2x-a$

και θα είναι $a=\int_0^1 \left(3x^2+2x-a\right)dx \Leftrightarrow a=\left[x^3\right]_0^1+\left[x^2\right]_0^1-a[x]_0^1 \Leftrightarrow$

$a=1-0+1-0-a\cdot(1-0) \Leftrightarrow a=1$

Καταλήξαμε ότι η συνέρτηση είναι $f(x)=3x^2+2x-1$

Θέμα Β1β

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=\left(x^2-3x+2\right)\cdot F(x)$
Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[1,2]$
είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $\Phi'(x)=(2x-3)\cdot F(x)+\left(x^2-3x+2\right)\cdot f(x)$
$\Phi(1)=\Phi(2)=0$ σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_0\in(1,2)$: $\Phi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \left(3-2x_0\right)\cdot F\left(x_0\right)=\left(x_0{}^2-3x_0+2\right)\cdot f\left(x_0\right)$

Θέμα Β1γ

$$I=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (24x+8)\cdot\sqrt{3x^2+2x-1}\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 4\cdot\left(3x^2+2x-1\right)'\cdot\sqrt{3x^2+2x-1}\,dx=$$

$$4\cdot\left[\frac{\left(3x^2+2x-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

Θέμα Β2

$$I_1=\int_1^3 \frac{f(2x)}{x}\,dx=\int_1^3 \frac{4x^2-6x}{x}\,dx=\int_1^3 (4x-6)\,dx=\left[2x^2-6x\right]_1^3=4$$

$$I_2=\int_5^8 \frac{2x-3}{\sqrt{f(x)}}\,dx=\int_5^8 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x}}\,dx=2\int_5^8 \frac{\left(x^2-3x\right)'}{2\sqrt{x^2-3x}}\,dx=2\cdot\left[\sqrt{x^2-3x}\right]_5^8=2\sqrt{10}$$

$$I_3=\int_7^5 e^{x+\ln f(x)}\,dx=\int_7^5 f(x)\cdot e^x\,dx=\int_7^5 \left(3x^2+2x-1\right)\cdot e^x\,dx \overset{\kappa.\pi.}{=}$$

$$\left[\left(3x^2+2x-1\right)\cdot e^x\right]_7^5-\int_7^5 (6x+2)\cdot e^x\,dx \overset{\kappa.\pi.}{=}$$

$$\left[\left(3x^2+2x-1\right)\cdot e^x\right]_7^5-\left[(6x+2)\cdot e^x\right]_7^5+\int_7^5 6\cdot e^x\,dx = 5\cdot e^5-19\cdot e^7$$

Θέμα Γ1

Εφόσον $x>0$

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2$

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<x_{2-1} \Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}$

άρα η συνέρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$

$f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

όπου $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

άρα $f(A)=(-1,+\infty)$

Θέμα Γ2

$x^2 = 2018 \cdot e^{1-x} \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{x-1} = 2018 \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{x-1} - 1 = 2017 \Leftrightarrow f(x) = 2017$

Επειδή $2017 \in f(A)$ θα υπάρχει $x_1 \in A:\ f(x_1) = 2017$
και επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 άρα η ρίζα x_1 είναι μοναδική

Θέμα Γ3

$g(x) = x \cdot e^{x-1} + 1$
$g'(x) = e^{x-1} + x \cdot e^{x-1}$

Η εφαπτομένη στο $A(x_0, g(x_0))$ είναι η ευθεία $y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0)$
και εφόσον διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα την επαληθεύει το $(0, 0)$
άρα θα πρέπει $g(x_0) = x_0 \cdot g'(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{x_0 - 1} + 1 = x_0 \cdot \left(e^{x_0 - 1} + x_0 \cdot e^{x_0 - 1}\right) \Leftrightarrow$
$x_0^2 \cdot e^{x_0 - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(1) \xLeftrightarrow{f\ 1-1} x_0 = 1$

άρα $g(1) = 2$ και $g'(1) = 2$
και η εφαπτομένη είναι $y = 2x$

Θέμα Γ4

$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$

$d'(t) = \dfrac{x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$

σε χρόνο t_0 έχουμε

$x(t_0) = 1$, $x'(t_0) = 2$

$y(t_0) = x(t_0) \cdot e^{x(t_0) - 1} + 1 = 1 + 1 = 2$
$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot e^{x(t_0) - 1} + x(t_0) \cdot x'(t_0) \cdot e^{x(t_0) - 1} = 2 + 2 = 4$

συνεπώς $d'(t_0) = \dfrac{2 + 2 \cdot 4}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ μον / χρ

Θέμα Δ1α

θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x) = f'(x) - e^{-2x}$
Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-2,-1]$ ως πράξεις συνεχών

$\Phi(-2) = f'(-2) - e^4 = 16 - e^4 < 0$
$\Phi(-1) = f'(-1) - e^2 = 9 - e^2 > 0$

συμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-2,-1)$
ώστε $\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = e^{-2\xi}$

Θέμα Δ1β

Θεωρούμς την συνάρτηση $K(x) = \dfrac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
με $\lim_{x \to 0} K(x) = 2$

$f(x) = \left(x^2 - x\right) \cdot K(x) + \eta\mu 3x$

f συνεχής άρα $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

f παραγωγίσιμη με $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$
$\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x \cdot (x-1) \cdot K(x)}{x} + \dfrac{3 \cdot \eta\mu 3x}{3x} \right) = -2 + 3 = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$

Θέμα Δ1γ

$f''(x)+2\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}\cdot f''(x)+2\cdot e^{2x}\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^{2x}\cdot f'(x)$
Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\xi, 0]$
παραγωγίσιμη στο $(\xi, 0)$ με
$g'(x)=e^{2x}\cdot(f''(x)+2\cdot f'(x))$

$g(0)=f(0)=1$
$g(\xi)=e^{-2\xi}\cdot f'(\xi)=e^{-2\xi}e^{2\xi}=e^{0}=1=g(0)$
συμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_0 \in (\xi, 0) \subset (-2, 0)$ ώστε $g'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow f''\left(x_0\right)+2\cdot f'\left(x_0\right)=0$
άρα η δοσμένη εξίσωση έχει λύση στο $(-2, 0)$

Θέμα Δ2α

$f^2(x)+2xf(x)+x^2=e^{-2x}+2e^{-x}+1 \Leftrightarrow$
$(f(x)+x)^2=\left(e^{-x}+1\right)^2 \Leftrightarrow$
$|f(x)+x|=e^{-x}+1$

επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^{-x}+1 \neq 0$
η συνάρτηση $h(x)=f(x)+x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και αφού είναι και συνεχής, θα είναι σταθερού προσήμου.
Επειδή $h(1)=f(1)+1=\dfrac{1}{e}+1>0$
θα είναι $h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)+x>0$

άρα $f(x)+x=e^{-x}+1 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}-x+1$

Θέμα Δ2β

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύουν
$-x_1+1>-x_2+1$ και $e^{-x_1}>e^{-x_2}$

άρα $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$ δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως
φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$ άρα είναι αντιστρέψιμη

Θέμα Δ2γ

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f^{-1}(2) = \left(f^{-1}\right)'(2) \cdot (x-2)$

παρατηρούμε ότι $f(0) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 0$

επίσης γνωρίζουμε ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

παραγωγίζοντας την σχέση έχουμε $f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1$
για $x = 2$ $f'(0) \cdot \left(f^{-1}\right)'(2) = 1$

όπου $f'(x) = -e^{-x} - 1$ και $f'(0) = -2$

καταλήγουμε λοιπόν στο ότι $\left(f^{-1}\right)'(2) = -\dfrac{1}{2}$

και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow x + 2y = 1$$