

Επώνυμο: \_\_\_\_\_

Όνομα: \_\_\_\_\_

Τμήμα: \_\_\_\_\_

Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

A Βαθ.	B Βαθ.	M.O.

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**19-02-2017**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  το  $[a, \beta]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 10

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  ;

Μονάδες 5

**A3.** Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**) τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(a) = f(\beta)$  τότε υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$

**β)** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και έχει δύο ρίζες, τότε η  $f''$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα

**γ)** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και ορίζεται η συνάρτηση  $f \circ g$ , τότε η  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

**δ)** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$  τότε  $f(a) \neq f(\beta)$ .

**ε)** Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$ , ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 10

## Θέμα Β

**B1.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(x) = 3x^2 + 2x - \int_0^1 f(x) dx$

**α)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Μονάδες 5

**β)** Θεωρούμε  $F$  μία αρχική συνάρτηση της  $f$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $(3 - 2x_0) \cdot F(x_0) = (x_0^2 - 3x_0 + 2)f(x_0)$

Μονάδες 4

**γ)** να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (24x + 8) \cdot \sqrt{f(x)} dx$

Μονάδες 4

**B2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x$ . Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^3 \frac{f(2x)}{x} dx$$

Μονάδες 3

$$I_2 = \int_5^8 \frac{2x - 3}{\sqrt{f(x)}} dx$$

Μονάδες 4

$$I_3 = \int_7^5 e^{x + \ln f(x)} dx$$

Μονάδες 5

## Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 \cdot e^{x-1} - 1$  και  $g(x) = x \cdot e^{x-1} + 1$  με  $A_f = A_g = (0, +\infty)$ .

**Γ1.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$

Μονάδες 5

**Γ2.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^2 = 2018 \cdot e^{1-x}$  στο  $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

**Γ3.** Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο  $A(x_0, g(x_0))$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Μονάδες 7

**Γ4.** Έστω επιπλέον ότι ένα κινητό  $M$  κινείται στην καμπύλη  $y = x \cdot e^{x-1} + 1$ . Τη χρονική στιγμή που το  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, g(1))$ , η τεταμένη  $x$  του  $M$  αυξάνει με ρυθμό  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης  $d = (OM)$  τη χρονική στιγμή που το κινητό  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A$

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f'(-2) = 16$ ,  $f'(-1) = 9$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$ .

**α)** Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (-2, -1)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = e^{-2\xi}$

Μονάδες 4

**β)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

Μονάδες 3

**γ)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $f''(x) + 2f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(-2, 0)$

Μονάδες 5

**Δ2.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = \frac{1}{e}$  η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $f^2(x) + x^2 = e^{-2x} - 2x \cdot f(x) + 2e^{-x} + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να δειχθεί ότι  $f(x) = e^{-x} - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη

Μονάδες 3

**γ)** Με δεδομένο ότι η  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_{f^{-1}}$  στο  $x_0 = 2$

Μονάδες 5

**Ευχόμαστε Επιτυχία !!!**