ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α' Λυκείου

4 / 12 / 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 10

Α2.

α) Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α

β) Να γραφεί η ταυτότητα Διαφορά Κύβων

Μονάδες 3+2

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος

α) Κάθε πραγματικός αριθμός α έχει αντίστροφο τον $\frac{1}{\alpha}$

Λάθος

β) Ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0\}$

Λάθος

γ) Αντίθετοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν

Σωστό

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta \geq 0$ ισχύει ότι $|x| > \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Λάθος

ε) Ισχύει ότι $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$

Σωστό

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η παράσταση $\Pi = x^3-(3x+2)\cdot(3x-2)-x\cdot(4-x)^2$

α) Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι $\Pi = 4-16x-x^2$

$$\Pi = x^3-(3x+2)\cdot(3x-2)-x\cdot(4-x)^2=$$
$$x^3-(9x^2-4)-x\cdot(16-8x+x^2)=$$
$$x^3-9x^2+4-16x+8x^2-x^3=$$
$$4-16x-x^2$$

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης Π για $x=\left[(-3)^2\cdot 4^3+2\right]^0+2^2$

$$x=\left[(-3)^2\cdot 4^3+2\right]^0+2^2=1+4=5$$

Άρα $\Pi = 4-16\cdot 5-5^2=4-80-25=-101$

γ) Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{\Pi-4+14x}{x^2-4}$

$$\frac{\Pi-4+14x}{x^2-4}=\frac{4-16x-x^2-4+14x}{x^2-4}=\frac{-x^2-2x}{x^2-4}=$$
$$\frac{-x(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)}=-\frac{x}{x-2}=\frac{x}{2-x}$$

Μονάδες 5+3+5

Β2.

α) να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$

$(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) να αποδείξετε ότι $\dfrac{2x}{x^2+1}\in[-1,1]$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$ το οποίο είναι ισοδύναμο με τις ανισώσεις

$-1 \le \frac{2x}{x^2+1}$ και $\frac{2x}{x^2+1} \le 1$

Στην πρώτη ανίσωση: επειδή $x^2+1 \ge 1 > 0$ έχουμε το δικαίωμα να κάνουμε χιαστί και δεν θα αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Έτσι: $-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow -x^2-1 \le 2x \Leftrightarrow x^2+2x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \ge 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Στην δεύτερη ανίσωση: επειδή $x^2+1 \ge 1 > 0$ έχουμε το δικαίωμα να κάνουμε χιαστί και δεν θα αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Έτσι: $\frac{2x}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow 2x \le x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο

Μονάδες 6+6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x \ge 2$, $A = 3x-4$

όταν $x \ge 2 \Leftrightarrow 3x \ge 6 \Leftrightarrow 3x-6 \ge 0$ άρα $|3x-6| = 3x-6$ και η παράσταση A γίνεται $A = |3x-6|+2 = 3x-6+2 = 3x-4$

β) Για κάθε $x < 2$, $A = 8-3x$

όταν $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$ άρα $|3x-6| = -(3x-6) = 6-3x$ και η παράσταση A γίνεται $A = |3x-6|+2 = 6-3x+2 = 8-3x$

Μονάδες 5+5

Γ2. Αν $x \ge \frac{2}{3}$ να αποδείξετε ότι $\frac{9x^2-1}{|3x-2|+3} = 3x-1$

όταν $x \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x \ge 2 \Leftrightarrow 3x-2 \ge 0$ άρα $|3x-2| = 3x-2$ και το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{9x^2-1}{|3x-2|+3}=\frac{9x^2-1}{3x-2+3}=\frac{(3x)^2-1^2}{3x+1}=\frac{(3x-1)(3x+1)}{3x+1}=3x-1$$

Μονάδες 8

Γ3. Αν $-1<\beta<1$ να γραφεί η παράσταση $\Pi=|2-|\beta-1||$ χωρίς απόλυτο.

Αφού $\beta<1 \Leftrightarrow \beta-1<0$ άρα $|\beta-1|=-(\beta-1)=1-\beta$ τότε έχουμε $\Pi=|2-(1-\beta)|=|2-1+\beta|=|1+\beta|$

Αφού $\beta>-1 \Leftrightarrow \beta+1>0$ άρα $|\beta+1|=\beta+1$ και καταλήγουμε ότι $\Pi=\beta+1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha-2|<1$
- $d(\beta,3)\le 2$

α) Να αποδειχτεί ότι $1<\alpha<3$.

$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1$ προσθέτουμε τον αριθμό 2 και $1<\alpha<3$

β) Να αποδειχτεί ότι $1\le\beta\le 5$.

$d(\beta,3)\le 2 \Leftrightarrow |\beta-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\beta-3\le 2$ προσθέτουμε τον αριθμό 3 και $1\le\beta\le 5$

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha+3\beta$.

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση του α με το 2: $1<\alpha<3 \Leftrightarrow 2<2\alpha<6$

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση του β με το 3: $1\le\beta\le 5 \Leftrightarrow 3\le 3\beta\le 15$

Τις δύο αυτές νέες ανισώσεις τις προσθέτουμε κατά μέλη και $5<2\alpha+3\beta<21$

Προσοχή το ίσον δεν θα μεταφερθεί αφού η ανίσωση του α δεν το έχει

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

Γνωρίζουμε ότι **δεν** έχουμε το δικαίωμα να διαιρούμε ανισώσεις γιαυτό αντιστρέφουμε την ανίσωση του β η οποία είναι και θετική $1 \le \beta \le 5 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{\beta} \ge \frac{1}{5}$

Και τις δύο ανισώσεις $1 < \alpha < 3$ και $\frac{1}{5} \le \frac{1}{\beta} \le 1$ τις πολλαπλασιάζουμε συνεπώς θα έχουμε

$\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$ Προσοχή το ίσον δεν θα μεταφερθεί αφού η ανίσωση του α δεν το έχει

ε) Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε τον μαθητή του Αριστείδη πότε γεννήθηκε, και ο Αριστείδης απάντησε: Κύριε μου άρεσε πάρα πολύ η άσκηση και για να σας το αποδείξω λέω πώς γεννήθηκα το έτος $\frac{|\alpha-1|+|\alpha-3|+3996}{2}$. Ποια χρονιά γεννήθηκε ο Αριστείδης ;

Εφόσον $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$ άρα $|\alpha-1| = \alpha - 1$

Εφόσον $\alpha < 3 \Leftrightarrow \alpha - 3 < 0$ άρα $|\alpha-3| = -(\alpha-3) = 3-\alpha$

Τότε όμως $\frac{|\alpha-1|+|\alpha-3|+3996}{2} = \frac{\alpha-1+3-\alpha+3996}{2} = \frac{3998}{2} = 1999$

Μονάδες 4+4+6+7+4

Σας ευχόμαστε επιτυχία !!!!

(ένα καλό γραπτό στηρίζεται στο ότι οι λύσεις θα πρέπει να είναι άρτια γραμμένες και να έχουν τις κατάλληλες επεξηγήσεις όπου είναι αναγκαίο, ώστε να μην δημιουργούν αμφιβολίες)