σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:. . . . .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

04-12-2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 60

Μονάδες 10

Α2. α) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 33

β) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 74

Μονάδες 5

Α3. Σωστό(Σ) ή Λάθος (Λ).

α)Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α)

$$\begin{cases} x^2-2xy=4-y^2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy+y^2=4 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=4 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4+x)^2=4 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-4)^2-4=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-16x+16-4=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-16x+12=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3, x_2=1 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=3, y_1=4-3 \\ x_2=1, y_2=4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3, y_1=1 \\ x_2=1, y_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3,1) \\ (1,3) \end{cases}$$

β)

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x-x^2-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ -x^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ x_1=0, x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0, y_1=0^2+1 \\ x_2=1, y_2=1^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0, y_1=1 \\ x_2=1, y_2=2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (0,1) \\ (1,2) \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση είναι μία παραβολή και η δεύτερη εξίσωση μία ευθεία. Οι δύο γεωμετρικοί τόποι τέμνονται στα σημεία (0,1) και (1,2).

Μονάδες 7

Β2.

α)

$$A=\frac{\eta\mu(-x)\cdot\varepsilon\varphi(5\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sigma\varphi(2\pi-x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\frac{(-\eta\mu x)\cdot\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)\cdot(-\sigma\varphi x)}{(-\sigma\upsilon\nu x)\cdot(-\sigma\varphi x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)}==\frac{\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi^3 x$$

β)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}+\frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu\theta\,(1+\eta\mu\theta)\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}+\sigma\upsilon\nu\theta\,(1+\eta\mu\theta)\frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta\,(1+\eta\mu\theta)\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu^2\theta+(1+\eta\mu\theta)^2=2(1+\eta\mu\theta)\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu^2\theta+1+2\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta=2+2\eta\mu\theta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=2-1+2\eta\mu\theta-2\eta\mu\theta\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$

γ)

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{5}{12}\ ,\ \mu\varepsilon\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$$

Γνωρίζω ότι η γωνία μας βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο, άρα το ημίτονο είναι θετικό και όλοι οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αρνητικοί.

Για το ημίτονο έχω:

$$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1\Leftrightarrow\ \eta\mu^2\alpha+\left(-\frac{5}{12}\right)^2=1\Leftrightarrow\ \eta\mu^2\alpha+\frac{25}{144}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \eta\mu^2\alpha=\frac{144}{144}-\frac{25}{144}\Leftrightarrow\ \eta\mu^2\alpha=\frac{119}{144}\Leftrightarrow\ \eta\mu\alpha=\frac{\sqrt{119}}{12}$$

Για την εφαπτομένη έχω:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{119}}{12}}{-\frac{5}{12}} = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Τέλος για την συνεφαπτομένη έχω:

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{119}}{5}} = -\frac{5}{\sqrt{119}} = -\frac{5\sqrt{119}}{119}$$

Μονάδες 5+7+6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α) Γνωρίζω ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη. Άρα θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως άυξουσα. Τότε από τον ορισμό γνωρίζω ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Όμως τα σημεία Α(5,2) και Β(4,9) είναι σημεία της συνάρτησης άρα: $f(5) = 2$ και $f(4) = 9$.

Άρα για $x_1 = 4$ και $x_2 = 5$ από τον ορισμό της μονοτόνίας και επειδή 4<5 έχω $f(4) < f(5) \Leftrightarrow 9 < 2$ Άτοπο.

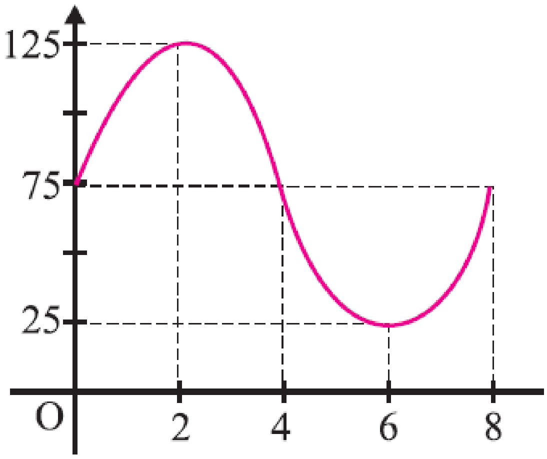
Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β)

$$f(5-3x) < 2 \Leftrightarrow f(5-3x) < f(5) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} 5-3x > 5 \Leftrightarrow -3x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Μονάδες 3+4

Γ2.



Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δίνεται από τον τύπο: $f(x) = A + \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $A > 0, \rho > 0, \omega > 0$.

α)

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι $\max f = 125$ και $\min f = 25$.

β)

Γνωρίζουμε ότι:

$$-1 \le \eta\mu(\omega x) \le 1 \Leftrightarrow -\rho \le \rho \cdot \eta\mu(\omega x) \le \rho \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A - \rho \le A + \rho \cdot \eta\mu(\omega x) \le A + \rho$$

Άρα

$$\begin{cases} A - \rho = \min f \\ A + \rho = \max f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - \rho = 25 \\ A + \rho = 125 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 25 + \rho \\ 25 + \rho + \rho = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 25 + \rho \\ 2\rho = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 25 + \rho \\ \rho = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 75 \\ \rho = 50 \end{cases}$$

γ)

Η περίοδος της συνάρτησης $f(x)$ είναι T=8.

δ)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 8 = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{8} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

ε)

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,2\right) U \left(6,8\right)$.

στ)

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{f(x)} = 75 + 50 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{x}\right)$ άρα για $x = \frac{4}{6}$ έχω:

$$\mathrm{f}\left(\frac{4}{6}\right) = 75 + 50 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{6}\right) = 75 + 50 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 75 + 50 \cdot \frac{1}{2} = 75 + 25 = 100$$

Μονάδες 3*6=18

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{9-x} - x$.

Δ1.

Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$9 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$. Άρα έχω $A_f = (-\infty, 9]$

Δ2.

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y πρέπει να θέσουμε όπου $x = 0$.

Άρα: $f(0) = \sqrt{9-0} - 0 = \sqrt{9} = 3$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο (0,3)

Δ3.

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$ (1)

Και $9 - x_1 > 9 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2}$ (2)

Άρα προσθαίτωντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\sqrt{9-x_1} - x_1 > \sqrt{9-x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ4.

Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχω

$x \leq 9 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(9) \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{9-9} - 9 \Leftrightarrow f(x) \geq -9$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με –9.

Δ5.

$\sqrt{9-x} < x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} - x < 3 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

Όμως πρέπει $x \leq 9$.

Άρα $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 9 \Leftrightarrow x \in (0, 9]$

Μονάδες 4+5+6+5+5