ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 4- 12- 16

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 28-29 σχολικού βιβλίου

Α2. Θεωρία σελ.14 σχολικού βιβλίου

Α3. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α)

$$\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\neq 0 \Leftrightarrow x^2+1\neq 0 \quad \text{και} \quad x-3\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -1 (\text{που ισχύει}) \quad \text{και} \quad x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq 3$$

$$\frac{3\left(x-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)}\geq 0 \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\geq 0$$

Σχηματίζω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$(x-1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
(x^2+1)	+	+	+
Γινόμενο	+	-	+

Άρα $x\leq 1$ ή $x\geq 3 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

άρα $A_f=\left(-\infty,1\right]\cup\left(3,+\infty\right)$

β) $\left.\begin{array}{l} x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2 \\ x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in\left(-2,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$, άρα $A_g=\left(-2,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

Β2. α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\cancel{\left(x+1\right)}}{\cancel{x+1}}=-1$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+9x-9}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\left(x-1\right)+9\left(x-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\left(x-1\right)}\left(x^2+9\right)}{\cancel{x-1}}=10$

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) $f(1+h)-f(1) = \alpha(1+h)^2 + \left(\alpha^2+6\right)(1+h) - \left(\alpha+\alpha^2+6\right) =$

$= \alpha\left(1+2h+h^2\right) \cancel{+\alpha^2} + \alpha^2 h \cancel{+6} + 6h - \alpha \cancel{-\alpha^2} \cancel{-6} = \cancel{\alpha} + 2\alpha h + \alpha h^2 + \alpha^2 h + 6h \cancel{-\alpha} =$

$= h\left(2\alpha + \alpha h + \alpha^2 + 6\right)$

$f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}\left(2\alpha+\alpha h+\alpha^2+6\right)}{\cancel{h}} = 2\alpha+\alpha^2+6$

β) $f'(1)=5 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+6=5 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$

Γ2. α) Η παράσταση $\ln\left(4-x^2\right)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν ισχύει:

$4-x^2>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Άρα η συνάρτηση $f(x)=\ln(4-x^2)$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A=(-2,2)$.

β) Έχουμε: $f'(x) = \left[\ln(4-x^2)\right]' = \dfrac{1}{4-x^2}\cdot\left(4-x^2\right)' = \dfrac{-2x}{4-x^2}$, για κάθε $x\in A$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{\left(4-x^2\right)\left(\sqrt{x+4}-2\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(4-x^2\right)\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cancel{x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\cancel{x}\left(4-x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(4-x^2\right)} = \dfrac{-2\left(\sqrt{4}+2\right)}{4} = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $(x-1)(x^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ και $x^2+1 \neq 0$ (που ισχύει) $\Leftrightarrow x \neq 1$

άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Δ2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-2}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2(x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)} = \dfrac{2\cdot 2}{2} = 2$

Δ3. Για να είναι η συνάρτηση g συνεχής θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 3\alpha + 5 \overset{\Delta 2}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 5 = 2 \Leftrightarrow 3\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Δ4. Για $\alpha = -1$ η $g(x) = 3\cdot(-1) + 5 = 2$, επομένως θα είναι:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{x^2+1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$, οπότε:

Θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Έχω:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2((h+1)+1)}{(h+1)^2+1} - 2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(h+2)}{h^2+2h+1+1} - 2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(h+2)}{h^2+2h+2} - \dfrac{2h^2+4h+4}{h^2+2h+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2h+4-2h^2-4h-4}{h^2+2h+2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(-2h^2-2h)}{(h^2+2h+2)}}{\dfrac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2h^2-2h)}{h(h^2+2h+2)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}(h^2+2h+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2(h+1)}{(h^2+2h+2)} =$$

$$\frac{-2(0+1)}{(0^2+2\cdot 0+2)} = \frac{-2}{2} = -1 \in \mathbb{R}$$

Άρα, $g'(1) = -1$