

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ 05-01-2017**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Ορισμός σχολικό βιβλίο / σελ 66

**A2.** Ορισμός σχολικό βιβλίο / σελ 87

**A3.** Ορισμός σχολικό βιβλίο / σελ 16

**A4.** Απόδειξη σχολικό βιβλίο / σελ 65

**A5.** Λ-Λ-Λ-Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

**β)** Πρέπει  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow 2\lambda - 3 = 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$

**γ)** Για το σημείο τομής με τον άξονα  $y'y$  θέτω όπου  $x=0$ , άρα:

$$f(0) = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

Άρα το σημείο τομής είναι το (0,0)

Για τα σημεία τομής με τον άξονα  $x'x$  πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα (0,0) και (1,0)

**B2.**

**α)**  $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 4, x \in \mathbb{R}$

Το  $A(-1, -10) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = -10 \Leftrightarrow$

$$(-1)^3 - a(-1)^2 + \beta(-1) - 4 = -10 \Leftrightarrow$$

$$-1 - a - \beta - 4 = -10 \Leftrightarrow$$

$$a + \beta = 5 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Το } B(2,8) \in C_f &\Leftrightarrow f(2) = 8 \Leftrightarrow \\ &2^3 - 2^2\alpha + 2\beta - 4 = -10 \Leftrightarrow \\ &8 - 4\alpha + 2\beta - 4 = 8 \Leftrightarrow \\ &-4\alpha + 2\beta = 4 \Leftrightarrow \\ &-2\alpha + \beta = 2 \\ &2\alpha - \beta = -2 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 4$

Άρα  $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**β)** Για το σημείο τομής με τον άξονα  $y'y$  θέτουμε όπου  $x=0$ , άρα:  
 $f(0) = -4$

Άρα το σημείο τομής είναι το  $(0, -4)$

Για τα σημείο τομής με τον άξονα  $x'x$  πρέπει να λύσουμε την εξίσωση  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1) + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Άρα το σημείο τομής είναι το  $(1, 0)$

**γ)**

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1) + 4(x-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+4) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x < 1$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

**α)**

Βιβλία $x_i$	Μαθητές $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$	$x_i v_i$
1	4	16	4	16	4
2	6	24	10	40	12
3	8	32	18	72	24
4	7	28	25	100	28
Άθροισμα	25	100	-	-	68

**β)**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v} = \frac{68}{25} = 2,72$$

**γ)**

$$\delta = x_{13} = 3$$

**δ)**

$$24\% + 32\% + 28\% = 84\%$$

**Γ2.**

**α)**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} \Rightarrow 206 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} \Rightarrow \sum_{i=1}^8 x_i = 8 \cdot 206 \Rightarrow \sum_{i=1}^8 x_i = 1648 \text{ cm}$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i + 212 + 215}{10} = \frac{1648 + 212 + 215}{10} = \frac{2075}{10} = 207,5 \text{ cm}$$

**β)**

$$\bar{x}'' = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i - 211}{9} = \frac{2075 - 211}{9} = \frac{1864}{9} = 207,1 \text{ cm}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

**α)**

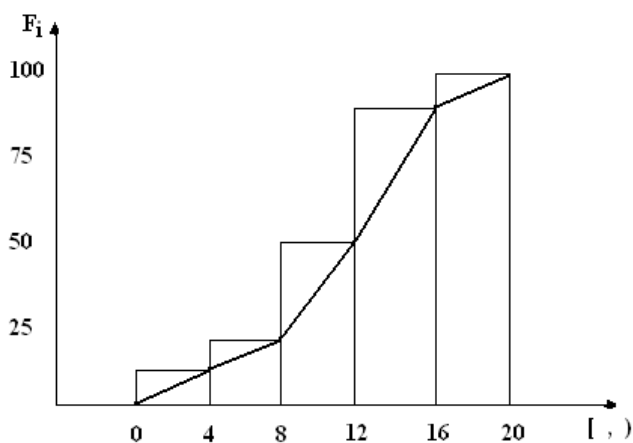
Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
[0,4)	2	5	5	10	10
[4,8)	6	7	12	14	24
[8,12)	10	13	25	26	50
[12,16)	14	18	43	36	86
[16,20)	18	7	50	14	100
Άθροισμα	-	50	-	100	-

**β)**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5}{v} =$$

$$= \frac{2 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 10 \cdot 13 + 14 \cdot 18 + 18 \cdot 7}{50} = \frac{560}{50} = 11,2$$

**γ)** Ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



**Γ5.**  $\delta = 12$

**Γ6.**  $36\% + 14\% = 50\%$

**Γ7.**  $10\% + 14\% = 24\%$

**Δ2.**

$$f(x) = x^3 + 7x - 8, \quad x \in \mathbb{R}$$

**α)**

$$f(0) = 0 + 0 - 8 = -8$$

$$f(1) = 1 + 7 - 8 = 0$$

**β)** Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε: "

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 8 < 7x_2 - 8 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**γ)**

$$f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 7x - 8 > 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 7x - 7 - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$(x^3 - 1) + (7x - 7) > 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 7(x-1) > 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1 + 7) > 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2 + x + 8) > 0 \stackrel{(\Delta < 0)}{\Rightarrow}$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$x > 1$$