σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.sygxrono.gr

Επώνυμο: ____________________________

Όνομα:______________________________

Τμήμα:______________________________

Ημερομηνία:__________________________

Α Βαθ.	Β Βαθ.	Μ.Ο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

(ενδεικτικές λύσεις)

Θέμα Α

Α1) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.)

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2) Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό – Λάθος

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ στην περιοχή του $-\infty$ **(Λ)**

β) Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της συνάρτησης χωρίζουν το πεδίο ορισμού της **(Λ)**

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό **(Σ)**

δ) Αν $f'(x_0) > 0$, τότε $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ κοντά στην περιοχή του x_0 **(Σ)**

ε) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ο άξονας x'x **(Λ)**

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Θέμα Β

Β1) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x}{x-3}=1 \text{ και } f(5)=6$$

α) Να δείξετε ότι $f(3)=6$

θεωρούμε $A(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-3}$, $x\neq 3$ με $\lim\limits_{x\to 3}A(x)=1$

τότε $f(x)=(x-3)A(x)+2x$ και $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-3)A(x)+2x\right]=0\cdot 1+6=6=f(3)$

αφού f συνεχής

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3,f(3))$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-f(3)=f'(3)(x-3)$ Χρειαζόμαστε την τιμή της παραγώγου

και $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)A(x)+2x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{(x-3)A(x)}{x-3}+\dfrac{2(x-3)}{x-3}\right]=1+2=3$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-6=3(x-3)\Leftrightarrow y=3x-3$

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(3,5)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)-x-2$ στο $[3,5]$ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. $\Phi(3)=f(3)-3-2=6-5=1>0$, $\Phi(5)=f(5)-5-2=6-7=-1<0$

Εφόσον για την συνάρτηση Φ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[3,5]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi+2$ άρα η γραφική παράσταση της Φ τέμνει την ευθεία $y=x+2$ σε ένα σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(3,5)$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[3,5]$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(3)+f(4)+f(5)}{3}$

Εφόσον η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σε αυτό άρα είναι συνεχής και στο $[3,5]$. Τότε όμως στο $[3,5]$ θα παρουσιάζει ελάχιστη (μ) και μέγιστη (Μ) τιμή.

Δηλαδή: για κάθε $x\in[3,5]$ θα ισχύει $\mu\leq f(x)\leq M$. Έτσι:

$3\in[3,5]$ θα είναι $\mu\leq f(3)\leq M$

$4\in[3,5]$ θα είναι $\mu\leq f(4)\leq M$

$5\in[3,5]$ θα είναι $\mu\leq f(5)\leq M$

Προσθέτοντας τις σχέσεις έχουμε ότι $3\mu \le f(3)+f(4)+f(5) \le 3M \Leftrightarrow \mu \le \dfrac{f(3)+f(4)+f(5)}{3} \le M$

άρα ο αριθμός $\dfrac{f(3)+f(4)+f(5)}{3}$ είναι τιμή της συνάρτησης, άρα υπάρχει $x_0 \in [3,5]$ ώστε

$f(x_0) = \dfrac{f(3)+f(4)+f(5)}{3}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+5+5

B2) Δίνεται συνάρτηση $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - x$

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί σύνολο τιμών της συνάρτησης

για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν $-x_1 > -x_2$ και

$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (1,+\infty)$. Εφόσον είναι συνεχής το σύνολο τιμών της θα είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln x} - x\right) = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x} - x\right) = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x = 0$ και για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$

Συνεπώς $f(A) = \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε ${x_0}^{x_0} = e$

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Αφού $0 \in f(A)$ θα υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow {x_0}^{x_0} = e$ και είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο A

ΜΟΝΑΔΕΣ 5+4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x \in (0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

γ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha\cdot\beta = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot\left(\frac{\ln\alpha}{x+1}+\frac{\ln\beta}{x+2}\right)\right] = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με x ώστε να κατασκευάσουμε το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\left(\frac{x\cdot\ln\alpha}{x+1}+\frac{x\cdot\ln\beta}{x+2}\right)\right]$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln\alpha}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln\alpha}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \ln\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln\beta}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln\beta}{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \ln\beta$

Άρα έχουμε $1\cdot(\ln\alpha+\ln\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\cdot\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta = 1$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-f^{-1}(x)\right)$

Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{{x_1}^2+1} = \sqrt{{x_2}^2+1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 άρα είναι αντιστρέψιμη. Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-f^{-1}(x)\right)$ θέτουμε $\omega = f^{-1}(x)$ και το όριο

γίνεται $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(f(\omega)-\omega\right) = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(\sqrt{\omega^2+1}-\omega\right) = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\omega^2+1}-\omega\right)\cdot\left(\sqrt{\omega^2+1}+\omega\right)}{\sqrt{\omega^2+1}+\omega} = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}+\omega} = 0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x+1)=\sqrt{8}$

$f^{-1}(x+1)=\sqrt{8} \Leftrightarrow x+1=f(8) \Leftrightarrow x+1=\sqrt{8+1} \Leftrightarrow x=2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+4+7+8+4

Θέμα Δ

Δ1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$ και $g(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$ με κοινό πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$\ln x_1<\ln x_2$ και $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x_1}<1-\frac{1}{x_2}$ και με πρόσθεση των σχέσεων έχουμε $f(x_1)<f(x_2)$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A άρα και 1-1

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο με τετμημένη 1

$g(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x+1-\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}-1+x=x-\frac{1}{x}+2\ln x$, $g(1)=1-1+0=0$

$g'(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$, $g'(2)=1+2+1=4$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y-0=4\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=4x-4$

γ) να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^2-3x+3\right)-f\left(\frac{1}{x^2-3x+3}\right)=g''\left(-\frac{1}{2}\right)-8$

$g''(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ άρα $g''\left(-\frac{1}{2}\right)=8$ και η εξίσωση είναι

$f\left(x^2-3x+3\right)-f\left(\frac{1}{x^2-3x+3}\right)=0 \Leftrightarrow g\left(x^2-3x+3\right)=g(1)$

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύουν $f(x_1)<f(x_2)$ και

$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x_1}\right)>f\left(\frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{x_1}\right)<-f\left(\frac{1}{x_2}\right)$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$g(x_1)<g(x_2)$ δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο A άρα και 1-1

Τότε όμως $g\left(x^2-3x+3\right)=g(1)\Leftrightarrow x^2-3x+3=1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\{x=1 \text{ ή } x=2\}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+5+4

Δ2) Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[0,1]$ και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f^3(x)+x\cdot f(x)=2x-1$. Επίσης δίνεται η συνάρτηση $g(x)=1-f(x)\cdot\ln x$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

για $x=0$ έχουμε $f^3(0)=-1\Leftrightarrow f(0)=-1<0$ και

για $x=1$ έχουμε $f^3(1)+f(1)=1\Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1)+1\right)=1$ από όπου έχουμε το συμπέρασμα ότι $f(1)>0$ αφού $f^2(1)+1>0$ Εφόσον η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0,1]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και θα είναι μοναδικό εφόσον η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ρίζα ρ στο $(0,x_0)$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$g(x_0)=1-f(x_0)\cdot\ln x_0=1>0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to o^+}g(x)=\lim\limits_{x\to o^+}\left(1-f(x)\cdot\ln x\right)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to o^+}\ln x=-\infty$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (αφού είναι γνησίως μονότονη με $f(0)<f(1)$) έτσι $0<x_0 \Leftrightarrow f(0)<0\Leftrightarrow -f(0)>0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to o^+}g(x)=-\infty$ θα υπάρχει α στην περιοχή του μηδενός ώστε $g(\alpha)<0$. Τότε όμως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[\alpha,x_0]$ άρα θα υπάρχει $\rho\in(\alpha,x_0)\subset(0,x_0)$ ώστε $g(\rho)=0$

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to\rho^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ όπου ρ είναι η ρίζα της g στο $(0,x_0)$

το όριο είναι της μορφής $\dfrac{f(\rho)}{0}$ άρα θα πρέπει να εξετάσουμε τα πρόσημα των όρων του κλάσματος του ορίου. Επειδή $\rho<x_0\Leftrightarrow f(\rho)<f(x_0)\Leftrightarrow f(\rho)<0$

Για να βρούμε το πρόσημο της g αφού γνωρίζουμε ρίζα, θα αναζητήσουμε την μονοτονία

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,x_0)\subset(0,1)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$\ln x_1 < \ln x_2$ και $f(x_1) < f(x_2)$ και επειδή οι αριθμοί είναι αρνητικοί

$\ln x_1 \cdot f(x_1) > \ln x_2 \cdot f(x_2) \Leftrightarrow -\ln x_1 \cdot f(x_1) < -\ln x_2 \cdot f(x_2) \Leftrightarrow 1-\ln x_1 \cdot f(x_1) < 1-\ln x_2 \cdot f(x_2)$

δηλαδή $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και έτσι όταν

$x > \rho \Leftrightarrow g(x) > 0$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι $\lim_{x\to\rho^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \quad \left(\frac{-}{0^+}\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+3+6

Σας ευχόμαστε επιτυχία !!!