



ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422

www.sygxrono.gr

Επώνυμο: _____

Όνομα: _____

Τμήμα: _____

Ημερομηνία: _____

A Βαθ.	B Βαθ.	M.O.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.)

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

A2) Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό – Λάθος

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ στην περιοχή του $-\infty$

β) Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της συνάρτησης χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό

δ) Αν $f'(x_0) > 0$, τότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ κοντά στην περιοχή του x_0

ε) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ο άξονας x'

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Θέμα Β

B1) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3} = 1 \text{ και } f(5) = 6$$

- α)** Να δείξετε ότι $f(3) = 6$
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3, f(3))$
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(3, 5)$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [3, 5]$ ώστε $f(x_0) = \frac{f(3) + f(4) + f(5)}{3}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+5+5

B2) Δίνεται συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x$

- α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί σύνολο τιμών της συνάρτησης
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $x_0^{x_0} = e$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5+4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}$

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

γ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha \cdot \beta = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot \left(\frac{\ln \alpha}{x+1} + \frac{\ln \beta}{x+2} \right) \right] = 0$$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f^{-1}(x))$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x+1) = \sqrt{8}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+4+7+8+4

Θέμα Δ

Δ1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ με κοινό πεδίο ορισμού

$$A = (0, +\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο με τετμημένη 1

γ) να λυθεί η εξίσωση $f(x^2 - 3x + 3) - f\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 3}\right) = g''\left(-\frac{1}{2}\right) - 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+5+4

Δ2) Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[0,1]$ και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$f^3(x) + x \cdot f(x) = 2x - 1. \text{ Επίσης δίνεται η συνάρτηση } g(x) = 1 - f(x) \cdot \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ρίζα ρ στο $(0, x_0)$

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \rho^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ όπου ρ είναι η ρίζα της g στο $(0, x_0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+3+6

Σας ευχόμαστε επιτυχία !!!