ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594

ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422

www.syghrono.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

06-11-2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο Σελίδα 217

Α2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο Σελίδα 151

Α3.

α) Σ **β) Λ** **γ) Σ** **δ) Λ** **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,3\right)$ και $\left(3,+\infty\right)$ ως ρητή. Για να είναι συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=3$

δηλαδή θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)=f\left(3\right)=7 \quad (1)$

Για $x\neq 3$ ονομάζουμε $A\left(x\right)=\dfrac{(\alpha+1)\cdot x^2-(2\cdot\beta+1)\cdot x+6}{x-3}$, με $\lim\limits_{x\to 3} A\left(x\right)=7$ και έχουμε

$(\alpha+1)\cdot x^2-(2\cdot\beta+1)\cdot x+6=\left(x-3\right)\cdot A\left(x\right)$. Συνεπώς θα ισχύει και

$$\lim_{x\to 3}\left[(\alpha+1)\cdot x^2-(2\cdot\beta+1)\cdot x+6\right]=\lim_{x\to 3}\left(x-3\right)\cdot A\left(x\right)$$

άρα $9\alpha+12-6\beta=0 \Leftrightarrow 2\beta=3\alpha+4 \;\; (2)$

τότε από την σχέση (1) και με αντικατάσταση της (2) έχουμε

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\alpha+1)\cdot x^2-(3\alpha+4+1)\cdot x+6}{x-3}=7 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot\left[(\alpha+1)\cdot x-2\right]}{x-3}=7 \Leftrightarrow$$

$\lim_{x\to 3}\left[(\alpha+1)\cdot x-2\right]=7 \Leftrightarrow 3\alpha+3-2=7 \Leftrightarrow \alpha=2$. Τέλος από (2) προκύπτει ότι $\beta=5$

πράγματι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-11x+6}{x-3} & , \quad x\neq 3\\ 7 & , \quad x=3\end{cases}$ είναι συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$

B2.

α) Για $x\neq\pm 1$ ονομάζουμε $A(x)=\dfrac{f(x)-1}{x^2-1}$ με $\lim_{x\to 1}A(x)=2$ και έχουμε $f(x)=(x^2-1)\cdot A(x)+1$.

Συνεπώς θα ισχύει και ότι $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x^2-1)\cdot A(x)+1\right]=1$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ θα ισχύει $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=1$

β) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\cdot A(x)+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot A(x)}{x-1}=4$

Πράγματι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $g(1)=\lim_{x\to 1}g(x)$

Για κάθε $x>1$ έχουμε $g(x)\geq\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$ άρα $\lim_{x\to 1^+}g(x)\geq\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{(*)}{=}1$ (1)

Για κάθε $x<1$ έχουμε $g(x)\leq\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$ άρα $\lim_{x\to 1^-}g(x)\leq\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{(*)}{=}1$ (2)

(*) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\underset{x-1=\omega}{\overset{\text{ΘΕΤΟΥΜΕ}}{=}}\lim_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=1$

Από τις σχέσεις (1) και (2) σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου θα έχουμε ότι $\lim_{x\to 1}g(x)=1$ συνεπώς

$g(1)=1$

Γ2. Σύμφωνα με το ερώτημα Γ1 έχουμε ότι $e^{f(x)}+f(x)-1=x \quad (3)$

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και $e^{f(x_1)}>e^{f(x_2)}$

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

$f(x_1)+e^{f(x_1)}>f(x_2)+e^{f(x_2)}\Leftrightarrow f(x_1)+e^{f(x_1)}+1>f(x_2)+e^{f(x_2)}+1\overset{(3)}{\Leftrightarrow}x_1>x_2$ το οποίο είναι άτοπο άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Εφόσον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1 , άρα είναι αντιστρέψιμη. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, θέτουμε όπου $f(x)=y$ και είναι $e^y+y-1=x$

Συνεπώς $f^{-1}(x)=e^x+x-1$ με $A_{f^{-1}}=f(A_f)=\mathbb{R}$

Γ4. Εφόσον $0\in A_f$, αναζητούμε την τιμή $f(0)$.

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=e^0+0-1=0$ άρα $f(0)=0$ Συνεπώς η C_f τέμνει τον άξονα y'y στο $O(0,0)$

Γ5. $e^{x^2-2}<3-x^2\Leftrightarrow e^{x^2-2}+(x^2-2)-1<0\Leftrightarrow f^{-1}(x^2-2)<f^{-1}(0)$ εφόσον η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f θα είναι γνησίως αύξουσα και η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την
$x^2-2<0\Leftrightarrow x^2<2\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

Παρατήρηση: Στην συγκεκριμένη άσκηση είναι σχετικά απλό να αποδείξουμε με τον ορισμό ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ …..

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση έχει $A_g=(0,+\infty)$ και για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \\ \ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2 \end{cases} \oplus \quad g(x_1)>g(x_2)$$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_g

Δ2.

α) $A_{(g\circ f)}=\left\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)>0\right\}=\mathbb{R}$ αφού $f(A_f)=(0,+\infty)$

β) Η σχέση $\dfrac{1}{f(x)}-\ln f(x)=x$ είναι ισοδύναμη με $g\big(f(x)\big)=x$

Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει $g\big(f(x_1)\big)<g\big(f(x_2)\big)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)$

Άρα καταλήξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Εφόσον η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και 1-1 άρα είναι αντιστρέψιμη. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε όπου $f(x)=y$ και είναι $\dfrac{1}{y}-\ln y=x$

Συνεπώς $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x=g(x)$ με $A_{f^{-1}}=A_g=f(A_f)=(0,+\infty)$

δ) Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\eta\mu 2x}{2x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=2+0=2$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\underset{2x=\omega}{\overset{\text{ΘΕΤΟΥΜΕ}}{=}}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=1$

Επειδή $x^2-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (το τριώνυμο έχει $\Delta<0$) , η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έχουμε: $f^{-1}\left(x^2-x+1\right)=1=f^{-1}(1)$ και επειδή η f^{-1} είναι 1-1 έχουμε

$$x^2-x+1=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \quad\eta\\ x=1\end{cases}$$

ε) Η δοσμένη ανίσωση γράφεται

$$\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\ln\frac{1}{f(x)}<1\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{f(x)}\right)<g(1)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f(x)}>1\Leftrightarrow f(x)<1\underset{f(1)=1}{\overset{f^{-1}(1)=1}{\Leftrightarrow}}f(x)<f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>1$$