ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

06-11-2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ο σημείο αναφοράς, να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

Σχολικό βιβλίο σελ 25

Α2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;
Σχολικό βιβλίο σελ 23

Α3.Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε υπάρχει $\lambda\in R$, ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$. **Σ**

β) Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\lambda||\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=-|\lambda|\vec{\beta}$. **Σ**

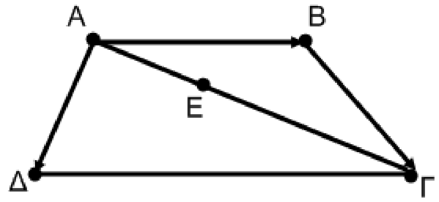
γ) Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$, τότε $\lambda=\mu$. **Λ**

δ) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_1\neq x_2$ και $y_1\neq y_2)$. **Λ**

ε) Το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε άλλο διάνυσμα. **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Αν $(\Gamma\Delta)=3(AB)$, $(E\Gamma)=3(EA)$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, τότε:



Β1. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα

$$\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{B\Delta}$$

Λύση

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} - \vec{\alpha} = -\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\beta} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - 3\vec{\alpha} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Β2. Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

Λύση

$$\overrightarrow{B\Delta} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 4\left(-\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}\right) = 4\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Delta}//\overrightarrow{BE}$$

Άρα Β, Δ, Ε συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για τα διακεκριμένα σημεία Α, Β και Γ ισχύει:

$$4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Gamma A} = 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$$

Γ1. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία ε.

Λύση

$$4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Gamma A} = 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} - 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}//\overrightarrow{\Gamma A}$$

Άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Γ2. Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ πάνω στην ευθεία ε.

Λύση

Από ερώτημα **Γ1** ισχύει ότι $\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A}$ άρα $\overrightarrow{BA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma A}$.

Άρα τα Β, Γ είναι εκατέρωθεν του Α.

Γ3. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ όταν το M είναι το μέσον του ΑΓ.

Λύση

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=x\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=2x\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=2x\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=2x\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(-3,4)$.

Δ1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Λύση

$$\overrightarrow{AB}=(1,4)-(-1,2)=(1+1,4-2)=(2,2)$$
$$\overrightarrow{A\Gamma}=(-3,4)-(-1,2)=(-3+1,4-2)=(-2,2)$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Λύση

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2*2-(-2)*2=4+4=8\neq0$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα. Άρα τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, άρα τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

Δ3. Να βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$.

Λύση

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

Έχουμε:

$$|\overrightarrow{A\Gamma}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$$

και

$$\overrightarrow{B\Gamma}=(-3,4)-(1,4)=(-3-1,4-4)=(-4,0)$$

Άρα

$$|\overrightarrow{B\Gamma}|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

Άρα, μόνο οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Δ5. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της ΒΓ και το $|\overrightarrow{AM}|$.

Λύση

$$M\left(\frac{1-3}{2},\frac{4+4}{2}\right)=M\left(-\frac{2}{2},\frac{8}{2}\right)=M(-1,4)$$

Άρα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(-1+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Δ6. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB}$.

Λύση

Έχουμε:

$$\overrightarrow{AM} = (-1+1, 4-2) = (0, 2)$$

$$\overrightarrow{MB} = (1+1, 4-4) = (2, 0)$$

Άρα:

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = 2(0,2) - 3(2,0) = (0,4) + (-6,0) = (-6,4)$$