Απαντήσεις Μαθηματικών Γενικής Εσπερινών 2017

Θέμα Α

Α1

Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2

Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α3

Σχολικό βιβλίο σελίδα 72

Α4

1. Σωστό
2. Λάθος (είναι λάθος η φορά της ανίσωσης)
3. Λάθος (μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο για ποιοτικά όσο και για ποσοτικά δεδομένα)
4. Σωστό
5. Λάθος (κανόνας παραγώγισης γινομένου)

Θέμα Β

Β1

Για το πεδίο ορισμού ισχύει:

$$A_h = \left\{ x \in A_f \text{ και } x \in A_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}$$

Για τον τύπο της συνάρτησης ισχύει:

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 6x + 9 + x - 3 = x^2 - 5x + 6$$

Β2

Για το πεδίο ορισμού ισχύει:

$$A_\varphi = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; g(x) \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; x - 3 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 3 \right\} = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

Για τον τύπο της συνάρτησης ισχύει:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)} = x - 3$$

Β3

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{h(x)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-3)} = \dfrac{1}{-1} = -1$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{h(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} (x-2) = 3 - 2 = 0$

Θέμα Γ

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$	N_i
1	2	2	18	2
3	3	9	3	5
5	4	20	4	9

9	1	9	25	10
Σύνολο	10	40	50	-

Γ1

1. $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} = \dfrac{40}{10} = 4$
2. $\delta = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$
3. $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot v_i}{v} = \dfrac{50}{10} = 5$

Γ2

Πρέπει να υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας. Ισχύει ο τύπος:

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Στην συνέχεια ελέγχουμε αν ο συντελεστής είναι μικρότερος ή ίσος με $0{,}10 = \dfrac{1}{10}$

Έστω $CV \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{4} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{5}{16} \le \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 500 \le 16$ Άτοπο

Άρα $CV > 0{,}10$, δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1

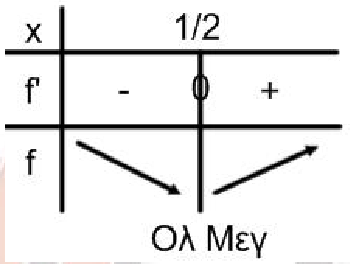
Αρχικά παραγωγίζουμε την συνάρτηση f .

Έχουμε: $f'(x) = \left(x^2 - x + 1\right)' = 2x - 1$

Έπειτα βρίσκουμε τις ρίζες και μελετάμε το πρόσημο της f'

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:



Άρα η συνάρτηση f :2 στο $(-\infty,0)$ και f :1 στο $(0,+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{2}$ την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Δ2

Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές

$f(2)=4-2+1=3$ και

$f'(2)=4-1=3$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση

$y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=f'(2)=3$

Δηλαδή $y=3x+\beta$. Άρα για $x=2$ και $y=f(2)=3$ έχουμε:

$3=3\cdot 3+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$

Άρα η ευθεία που ψάχνουμε δίνεται από τη σχέση: $y=3x-3$

Δ3

- <u>Σημείο τομής με τον άξονα y'y</u>:

Βάζουμε όπου $x=0 \Leftrightarrow y=3\cdot 0-3 \Leftrightarrow y=-3$. Άρα το σημείο τομής είναι το $(0,-3)$.

- <u>Σημείο τομής με τον άξονα x'x</u>:

Βάζουμε όπου $y=0 \Leftrightarrow 0=3x-3 \Leftrightarrow x=1$. Άρα το σημείο τομής είναι το $(-1,0)$.

Δ4

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1-1+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$