ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .
ΟΝΟΜΑ: . . . .
ΤΜΗΜΑ: . . . .
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:. . . . .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

02-12-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 63.

Μονάδες 10

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 69.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\alpha\cdot\beta=0$ τότε $\alpha=0$ και $\beta=0$ Λ

β) Ισχύει ότι: $\left((-2)^3\right)^4=\left(2^4\right)^3$ Σ

γ) Ισχύει ότι: $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$ Λ

δ) Για $x\neq0$ ισχύει ότι: $\left(\dfrac{3}{x}\right)^{-4}=\dfrac{x^4}{81}$ Σ

ε) Ισχύει $\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{x-1}{2}$ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η παράσταση: $A=\left[\left(2x^3y\right)^{-2}:\left(4^{-\frac{1}{3}}x^{-2}y^{-1}\right)^3\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-1}$.

Να αποδείξετε ότι: $A=-2x^3y^3$. **Μονάδες 6**

Λύση

$$A=\left[\left(2x^{3}y\right)^{-2}:\left(4^{-\frac{1}{3}}x^{-2}y^{-1}\right)^{3}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-1}$$

$$A=\left[\frac{1}{\left(2x^{3}y\right)^{2}}:\left(4^{-1}x^{-6}y^{-3}\right)\right]\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}}$$

$$A=\left[\frac{1}{4x^{6}y^{2}}\cdot\frac{1}{4^{-1}x^{-6}y^{-3}}\right]\cdot\left(-\frac{1}{\frac{1}{2x^{3}y^{2}}}\right)$$

$$A=\left[\frac{1}{4x^{6}y^{2}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4x^{6}y^{3}}}\right]\cdot\left(-\frac{1}{\frac{1}{2x^{3}y^{2}}}\right)$$

$$A=\left[\frac{1}{\cancel{4}\,\cancel{x^{6}}\,\cancel{y^{2}}}\cdot\cancel{4}\,\cancel{x^{6}}\,y^{\cancel{3}}\right]\cdot\left(-2x^{3}y^{2}\right)$$

$$A=y\cdot\left(-2x^{3}y^{2}\right)$$

$$A=-2x^{3}y^{3}$$

B2. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta-\beta^{2}}-\frac{\beta}{\alpha^{2}-\alpha\beta}\qquad,\ \text{όπου } \alpha\beta\neq 0,\ \alpha\neq\beta$$

Μονάδες 7

Λύση

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta-\beta^{2}}-\frac{\beta}{\alpha^{2}-\alpha\beta}=\frac{\alpha}{\beta\cdot(\alpha-\beta)}-\frac{\beta}{\alpha\cdot(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha^{2}}{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta)}-\frac{\beta^{2}}{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\alpha^{2}-\beta^{2}}{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta)}=\frac{\cancel{(\alpha-\beta)}\,(\alpha+\beta)}{\alpha\cdot\beta\cdot\cancel{(\alpha-\beta)}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\cdot\beta}+\frac{\cancel{\beta}}{\alpha\cdot\cancel{\beta}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

B3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{2}\geq\alpha\beta$

β) $\alpha^{2}+\beta^{2}+-2\alpha+2\beta+2\geq 0$

Μονάδες 6+6

Λύση

α)

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \geq \alpha\beta \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \geq \alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

β)

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\beta+2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2+2\beta+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2+(\beta+1)^2 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$$

Μονάδες 5

Λύση

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=\cancel{x^2}+2+\cancel{\frac{1}{x^2}}-\cancel{x^2}+2-\cancel{\frac{1}{x^2}}=4$$

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(2017+\frac{1}{2017}\right)^2-\left(2017-\frac{1}{2017}\right)^2$$

Μονάδες 3

Λύση

Από το ερώτημα Γ1 γνωρίζουμε ότι $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$ για κάθε $x \neq 0$, άρα για $x=2017$ έχουμε:

$$\left(2017+\frac{1}{2017}\right)^2-\left(2017-\frac{1}{2017}\right)^2=4$$

Γ3. Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

Μονάδες 4+4

Λύση

i) για κάθε $x \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0$, άρα $A = |3x-6|+2 = 3x-6+2 = 3x-4$

ii) για κάθε $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$, άρα
$A = |3x-6|+2 = -3x+6+2 = -3x+8$

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$$

Μονάδες 4

Λύση

Για $x \geq 2$ έχουμε:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-4} = \frac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{(3x-4)}} = 3x+4$$

Γ4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|x-3| \leq 4$ **β)** $|x-5| > 3$

Μονάδες 5

Λύση

α) $|x-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Leftrightarrow -4+3 \leq x \leq 4+3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-1,7]$

β) $|x-5| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 > 3 \\ x-5 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty,2) \cup (8,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $0 < 3y-2x < 13$.

Μονάδες 4

Λύση

$$\left.\begin{aligned} 1 < x < 3 \Leftrightarrow -6 < -2x < -2 \\ 2 < y < 5 \Leftrightarrow 6 < 3y < 15 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 0 < 3y-2x < 13$$

Δ2. Να γράψετε την παράσταση $A = |x-3|+|3y-2x|-|2-y|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Μονάδες 8

Λύση

Έχουμε:

- $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$, άρα $|x-3|=-x+3$
- $0<3y-2x<13$, άρα $|3y-2x|=3y-2x$
- $y>2 \Leftrightarrow y-2>0$, άρα $|y-2|=y-2$

Επομένως:

$$\begin{aligned} &A=|x-3|+|3y-2x|-|2-y| \Rightarrow \\ &A=-x+3+3y-2x-(y-2) \Leftrightarrow \\ &A=-x+3+3y-2x-y+2 \Leftrightarrow \\ &A=-3x+2y+5 \end{aligned}$$

Δ3. Δίνεται η παράσταση $B=\dfrac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2\cdot\sqrt{(x-1)^2}\cdot\sqrt{(x-3)^2}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^3}\cdot x\cdot\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$. Να αποδείξετε ότι

$B=\dfrac{1-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$.

Μονάδες 4

Λύση

$$B=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2\cdot\sqrt{(x-1)^2}\cdot\sqrt{(x-3)^2}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^3}\cdot x\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)} \Leftrightarrow$$

$$B=\frac{(x-1)\cdot|x-1|\cdot|x-3|}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\cdot(x-1)\cdot(x-3)} \overset{x>1}{\underset{x<3}{\Leftrightarrow}}$$

$$B=\frac{(x-1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(3-x)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$B=-\frac{(x-1)\cdot\cancel{(x-3)}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\cdot\cancel{(x-3)}} \Leftrightarrow$$

$$B=-\frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$$

Δ4. Να μετατρέψετε την παράσταση B σε ισοδύναμη με ρητό παρανομαστή.

Μονάδες 4

Λύση

Έχουμε:

$$B=-\frac{1-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}=-\frac{(1-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}=-\frac{(1-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-1}^{2}-\sqrt{x}^{2}}=$$

$$=-\frac{(1-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{x-1-x}=-(1-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)$$

Δ5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{B\cdot\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)}{A+2x-2y-4}$, όπου A και B οι παραστάσεις των προηγούμενων ερωτήσεων.

Μονάδες 5

Λύση

$$\frac{B\cdot\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)}{A+2x-2y-4}=\frac{-\dfrac{(x-1)}{\cancel{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)}}\cancel{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)}}{-3x+2y+5+2x-2y-4}=$$

$$=-\frac{(1-x)}{1-x}=-1$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ