ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .
ΟΝΟΜΑ: . . . .
ΤΜΗΜΑ: . . . .
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:. . . . .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

02-12-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 60.

Μονάδες 5

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 31.

Μονάδες 10

Α3. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$

Μονάδες 10

Λύση

α)

$$\begin{cases}3x+2y=3\\2x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=3\\4x-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=3\\7x=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2y=3\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=1\end{cases}$$

άρα η λύση του παραπάνω συστήματος είναι η: $(\mathrm{x},\mathrm{y})=(1,0)$.

β)

$$\begin{cases}x^2+y^2=17\\x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(5-x)^2=17\\y=5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+25-10x+x^2=17\\y=5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-10x+8=0\\y=5-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+4=0\\y=5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,x=4\\y=5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,y=4\\x=4,y=1\end{cases}$$

άρα οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι οι: $(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)=(1,4)$ ή $(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2)=(4,1)$.

Β2. Να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συστημάτων του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 5

Λύση

Το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (α) αποτελείται από 2 ευθείες που τέμνονται στο σημείο (1,0).

Το μη γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (β) αποτελείται από μία ευθεία και ένα κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\sqrt{17}$, που τέμνονται στα σημεία (1,4) και (4,1).

Β3. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Μονάδες 6

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$, δηλαδή η γωνία βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο. Άρα ισχύει

$$\eta\mu\omega<0.$$

Επομένως, από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega+\frac{3}{4}=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\eta\mu\omega=-\frac{1}{2}$$

Άρα,

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Και

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

Β4. Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta = \dfrac{1}{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$

β) $\dfrac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y} = -1$

Μονάδες 4

Λύση

α)

$$\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$$

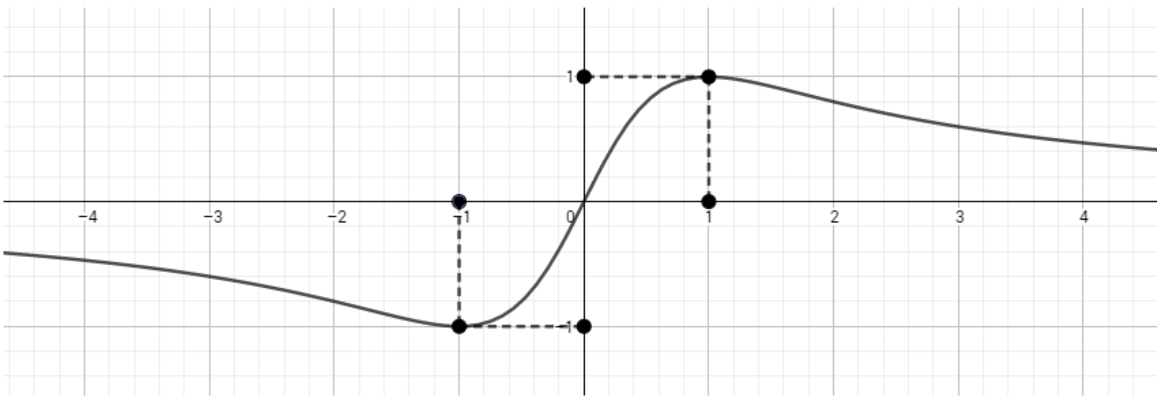
β)

$$\frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y} = \frac{\cancel{1} - \sigma\upsilon\nu^2 x - \cancel{1} + \sigma\upsilon\nu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y} = \frac{-\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y} =$$

$$= \frac{-\cancel{\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y\right)}}{\cancel{\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y\right)}} = -1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η γραφική παράσταση C_g μίας συνάρτησης $g(x)$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της g.

β) Να βρείτε τις τιμές $g(0), g(-1)$ και $g(1)$.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης g.

δ) Να σχολιάσετε αν η $g(x)$ είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 3+3+2+2

Λύση

α) $g: \searrow$ στο $(-\infty, -1)$

$g: \nearrow$ στο $[-1, 1]$

$g: \searrow$ στο $(1, +\infty)$

β) $g(0) = 0, g(-1) = -1, g(1) = 1$

γ) Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x = -1$ την τιμή $g(-1) = -1$, και μέγιστη τιμή για $x = 1$ την τιμή $g(1) = 1$.

δ) Από την γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, και το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι και το $-x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

Γ2. Να δείξετε ότι:

α) $$\frac{\eta\mu(\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)\cdot\eta\mu(-\omega)\cdot\varepsilon\varphi(9\pi+\omega)\cdot\sigma\varphi(13\pi-\omega)} = 1$$

β) $$\frac{\eta\mu(\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu\left(630^o-\theta\right)} = \eta\mu\theta$$

Μονάδες 10

Λύση

α)

$$\frac{\eta\mu(\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)\cdot\eta\mu(-\omega)\cdot\varepsilon\varphi(9\pi+\omega)\cdot\sigma\varphi(13\pi-\omega)} =$$

$$= \frac{\cancel{-\eta\mu\omega}\cdot(-\eta\mu\omega)\cdot(-\sigma\varphi\omega)}{-\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\left(\cancel{-\eta\mu\omega}\right)\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot(-\sigma\varphi\omega)} = \frac{\eta\mu\omega\cdot\sigma\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega\cdot 1} =$$

$$= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\sigma\varphi\omega = \varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega = 1$$

διότι:

$\eta\mu\left(\pi+\omega\right)=-\eta\mu\omega, 3^o$ τεταρτημόριο

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega, 2^o$ τεταρτημόριο

$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=-\sigma\varphi\omega, 2^o$ τεταρτημόριο

$\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega, 2^o$ τεταρτημόριο

$\eta\mu\left(-\omega\right)=-\eta\mu\omega, 4^o$ τεταρτημόριο

$\varepsilon\varphi\left(9\pi+\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\underbrace{8\pi}_{4\cdot 2\pi}+\pi+\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\pi+\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega, 3^o$ τεταρτημόριο

$\sigma\varphi\left(13\pi-\omega\right)=\sigma\varphi\left(12\pi+\pi-\omega\right)=\sigma\varphi\left(\pi-\omega\right)=-\sigma\varphi\omega, 2^o$ τεταρτημόριο

β)

$$\frac{\eta\mu\left(\pi+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{7\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu\left(630^o-\theta\right)}=$$

$$=\frac{-\eta\mu\theta\cdot\left(-\eta\mu\theta\right)\cdot\left(-\sigma\varphi\theta\right)}{-\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\varphi\theta=\eta\mu\theta$$

διότι:

$\eta\mu\left(\pi+\theta\right)=-\eta\mu\theta, 3^o$ τεταρτημόριο

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\eta\mu\theta, 3^o$ τεταρτημόριο

$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{7\pi}{2}+\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{8\pi-\pi}{2}+\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(4\pi-\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sigma\varphi\theta, 4^o$ τεταρτημόριο

$\eta\mu\left(630^\circ-\theta\right)=\eta\mu\left(360^\circ+270^\circ-\theta\right)=\eta\mu\left(270^\circ-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta, 3^o$ τεταρτημόριο

Γ3. Αν για ένα γραμμικό σύστημα το οποίο έχει μοναδική λύση, ισχύει $D_x+2D_y=D$ και επιπλέον $-2x+3y=5$, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, επομένως $D\neq 0$.

Άρα $D_x+2D_y=D\Leftrightarrow\dfrac{D_x}{D}+2\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{D}{D}\Leftrightarrow x+2y=1$

Άρα λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x+3y=5 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y=5 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=7 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

άρα η λύση του παραπάνω συστήματος είναι η: $(\mathrm{x},\mathrm{y})=(-1,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x+a$, με $a\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-1.3)$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $a=4$.

Μονάδες 4

β) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $p,q\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x)=(x+p)^2+q$

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο διάστημα $[-1,+\infty)$ και στο διάστημα $(-\infty,-1]$.

Μονάδες 5

δ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

Μονάδες 4

ε) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Μονάδες 4

στ) Αν $g(x)=x^2$, τότε να σχολιάσετε από ποια μετατόπιση της g προκύπτει η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Μονάδες 5

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση διέρχεται από το σημείο $A(-1.3)$, άρα $f(-1)=3$.

Επομένως με αντικατάσταση έχουμε:

$f(-1)=(-1)^2+2(-1)+a \Leftrightarrow 3=1-2+a \Leftrightarrow a=4$

Άρα η συνάρτηση γίνεται $f(x)=x^2+2x+4$

β) Πρέπει $f(x)=(x+p)^2+q \Leftrightarrow f(x)=x^2+2px+p^2+q$. Όμως γνωρίζουμε ότι $f(x)=x^2+2x+4$. Άρα:

$$\begin{cases} 2p=2 \\ p^2+q=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=3 \end{cases}$$

Δηλαδή $f(x)=(x+1)^2+3$.

γ)

- Αν $x\in[-1,+\infty)\Leftrightarrow x\geq -1\Leftrightarrow x+1\geq 0$. Επομένως:

  Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow (x_1+1)^2<(x_2+1)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x_1+1)^2+3<(x_2+1)^2+3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα $f:\nearrow$ στο $[-1,+\infty)$.
- Αν $x\in(-\infty,-1)\Leftrightarrow x<-1\Leftrightarrow x+1<0$. Επομένως:

  Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow (x_1+1)^2>(x_2+1)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x_1+1)^2+3>(x_2+1)^2+3\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα $f:\searrow$ στο $(-\infty,-1)$.

δ) Γνωρίζουμε ότι $f(-1)=3$. Όμως $f(1)=1^2+2\cdot 1+4=1+2+4=7$. Άρα η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

ε) Για να βρούμε σημείο τομής με τον άξονα y'y αρκεί να υπολογίζουμε το $f(0)$. Όπου:

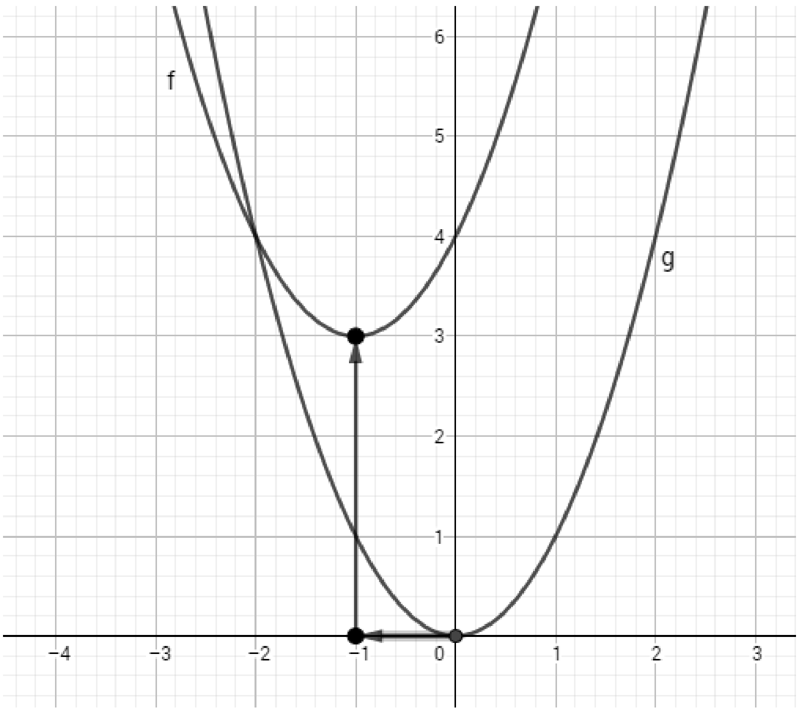
$f(0)=0+0+4=4$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα y'y είναι το (0,4).

Για τον άξονα x'x αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Δηλαδή:

$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x+4=0$, όμως $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 4=4-16=-12<0$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως δεν υπάρχουν σημεία τομής με τον άξονα x'x.

στ) Η συνάρτηση f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της g κατά μία μονάδα προς τα αριστερά, και 3 μονάδες προς τα πάνω.



f
g
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3