

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

02-12-2017

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε α και β πραγματικούς αριθμούς ισχύει πάντα $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Μονάδες 10

A2. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α και πως την συμβολίζουμε;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ Σ Λ

β) Ισχύει ότι: $\left((-2)^3 \right)^4 = (2^4)^3$ Σ Λ

γ) Ισχύει ότι: $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Σ Λ

δ) Για $x \neq 0$ ισχύει ότι: $\left(\frac{3}{x} \right)^{-4} = \frac{x^4}{81}$ Σ Λ

ε) Ισχύει $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x-1}{2}$ Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η παράσταση: $A = \left[(2x^3y)^{-2} : \left(4^{-\frac{1}{3}}x^{-2}y^{-1} \right)^3 \right] \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2} \right)^{-1}$.

Να αποδείξετε ότι: $A = -2x^3y^3$.

Μονάδες 6

B2. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta - \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 - \alpha\beta}, \text{ όπου } \alpha\beta \neq 0, \alpha \neq \beta$$

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \geq \alpha\beta$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + -2\alpha + 2\beta + 2 \geq 0$

Μονάδες 6+6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(2017 + \frac{1}{2017}\right)^2 - \left(2017 - \frac{1}{2017}\right)^2$$

Μονάδες 3

Γ3. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

Μονάδες 4+4

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

Μονάδες 4

Γ4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|x - 3| \leq 4$

β) $|x - 5| > 3$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $0 < 3y - 2x < 13$.

Μονάδες 4

Δ2. Να γράψετε την παράσταση $A = |x-3| + |3y-2x| - |2-y|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η παράσταση $B = \frac{(\sqrt{x-1})^2 \cdot \sqrt{(x-1)^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2}}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^3} \cdot x \cdot \left(1-\frac{3}{x}\right)}$. Να αποδείξετε ότι

$$B = \frac{1-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 4

Δ4. Να μετατρέψετε την παράσταση B σε ισοδύναμη με ρητό παρανομαστή.

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{B \cdot (\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{A+2x-2y-4}$, όπου A και B οι παραστάσεις των προηγούμενων ερωτήσεων.

Μονάδες 5

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ