ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594

ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422

www.syghrono.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

04-11-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ.23 Σχολικού Βιβλίου

Μονάδες 5

Α2. Σελ.33 Σχολικού Βιβλίου

Μονάδες 10

Α3.

α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω Μ εσωτερικό σημείο ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\Delta\mathrm{M}}=\vec{0}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\Delta\mathrm{M}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\Delta\mathrm{M}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Άρα οι πλευρές ΒΑ και ΓΔ είναι παράλληλες και ίσες, άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

Β2. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και το σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$7\overrightarrow{\text{MB}}+3\overrightarrow{\Gamma\text{M}}=4\overrightarrow{\text{MA}}.$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$7\overrightarrow{\text{MB}}+3\overrightarrow{\Gamma\text{M}}=4\overrightarrow{\text{MA}} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{\text{MB}}+4\overrightarrow{\text{MB}}+3\overrightarrow{\Gamma\text{M}}=4\overrightarrow{\text{MA}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\text{MB}}+3\overrightarrow{\Gamma\text{M}}=-4\overrightarrow{\text{MB}}+4\overrightarrow{\text{MA}} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{\Gamma\text{M}}+3\overrightarrow{\text{MB}}=4\overrightarrow{\text{BM}}+4\overrightarrow{\text{MA}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\Gamma\text{B}}=4\overrightarrow{\text{BA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\text{B}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\text{BA}}$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\text{B}}$ και $\overrightarrow{\text{BA}}$ είναι παράλληλα, άρα τα σημεία Α,Β,Γ συνευθειακά.

Μονάδες 8

Β3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-4)$, $\vec{\beta}=(-3,-2)$ και $\vec{\gamma}=(7,-6)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\gamma}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}$. Τότε ισχύει:

$$\vec{\gamma}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow (7,-6)=\kappa\cdot(2,-4)+\lambda\cdot(-3,-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (7,-6)=(2\kappa,-4\kappa)+(-3\lambda,-2\lambda) \Leftrightarrow (7,-6)=(2\kappa-3\lambda,-4\kappa-2\lambda) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa-3\lambda=7 \\ -4\kappa-2\lambda=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \kappa=2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρεθεί σημείο Μ στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο, ώστε:

$$2\overrightarrow{M\text{A}}-3\overrightarrow{\text{MB}}+5\overrightarrow{\text{M}\Gamma}=\vec{0}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$2\overrightarrow{M\text{A}}-3\overrightarrow{\text{MB}}+5\overrightarrow{\text{M}\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{\text{AM}}-3\overrightarrow{\text{AB}}+3\overrightarrow{\text{AM}}+5\overrightarrow{\text{A}\Gamma}-5\overrightarrow{\text{AM}}=\vec{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{\text{AM}}-3\overrightarrow{\text{AB}}+5\overrightarrow{\text{A}\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\text{AM}}=-3\overrightarrow{\text{AB}}+5\overrightarrow{\text{A}\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\text{A}\Gamma}$$

Μονάδες 8

Γ2. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(3,\kappa)$ και $\Gamma(\mu-1,\mu+2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=5$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1,\kappa-2)=(2,\kappa-2)$

Άρα:

$$\lambda=5\Leftrightarrow\frac{\kappa-2}{2}=5\Leftrightarrow\kappa-2=10\Leftrightarrow\kappa=8$$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ να είναι παράλληλα.

ΛΥΣΗ

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,8-2)=(2,6)$

Επίσης:

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(\mu-1-3,\mu+2-2)=(\mu-4,\mu)$

Πρέπει:

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2 & 6\\ \mu-4 & \mu\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2\mu-6(\mu-4)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\mu-6\mu+24=0\Leftrightarrow 4\mu=24\Leftrightarrow\mu=6$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,3)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\left(-2,\frac{3}{2}\right)$, όπου $\mathrm{A}(2,1)$ και $\Delta\left(1,\frac{9}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

ΛΥΣΗ

Έστω $B(x,y)$ τότε:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,3)\Leftrightarrow(x-2,y-1)=(-4,3)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=-4\\ y-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}\Leftrightarrow B(-2,4)$$

Ομοίως, αν $\Gamma(\alpha,\beta)$ τότε:

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\left(-2,\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(1-\alpha,\frac{9}{2}-\beta\right)=\left(-2,\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-\alpha=-2\\ \frac{9}{2}-\beta=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\Gamma(3,3)$$

Μονάδες 4

β) Αν Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ και το $\left|\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}\right|$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι:

$$M\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\Gamma}}{2},\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\Gamma}}{2}\right)=M\left(\frac{-2+3}{2},\frac{4+3}{2}\right)=M\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$$

Άρα:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}=\left(1-\frac{1}{2},\frac{9}{2}-\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Επομένως:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,3)$. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=(3+2,3-4)=(5,-1)$$

Όπου:

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-4-15=-19\neq0$$

Άρα τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα, και επομένως τα σημεία δεν είναι συνευθειακά.

Άρα τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε που ανήκει στον άξονα x'x, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{EM}}//\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $E(x,y)$. Επειδή το Ε ανήκει στον άξονα x'x ισχύει $y=0$. Άρα $E(x,0)$.

Άρα $\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{x},\frac{7}{2}\right)$

Επίσης:

$$\overrightarrow{EM} // \overrightarrow{M\Delta} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{M\Delta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - x - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Άρα, το σημείο είναι $E\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

Μονάδες 5

ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB}$

ΛΥΣΗ

Αρχικά θα βρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2} - 2, \frac{7}{2} - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MB} = \left(-2 - \frac{1}{2}, 4 - \frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} = 2\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) - 4\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{6}{2}, \frac{10}{2}\right) + \left(\frac{20}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (7, 3)$$

Μονάδες 6

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ