ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

04-11-2017

(ενδεικτικές λύσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία / Σχολικό Βιβλίο / Σελίδα 99

Α2. Θεωρία / Σχολικό Βιβλίο / Σελίδα 32

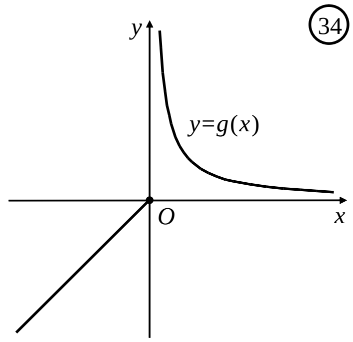
Α3. α) Ο ισχυρισμός είναι Ψ (ψευδής).

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$ και διαπιστώνουμε ότι είναι 1-1, αφού

- για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \ne x_2$ έχουμε: $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$
- για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \ne x_2$ έχουμε: $x_1 \ne x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} \ne \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$
- για κάθε $x_1 \in (-\infty, 0]$ και $x_2 \in (0, +\infty)$ έχουμε $f(x_1) = x_1 \le 0$ και $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2} > 0$

  δηλαδή $f(x_1) \ne f(x_2)$

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Α4.

α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ως ρητή. Για να είναι συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=2$,

δηλαδή θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=6 \quad (1)$

Για $x\neq 2$ ονομάζουμε $f(x)=\dfrac{(\alpha+2)\cdot x^2+(3-\beta)\cdot x-8}{x-2}$, με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$.

Οπότε $(\alpha+2)\cdot x^2+(3-\beta)\cdot x-8=(x-2)\cdot f(x)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left[(\alpha+2)\cdot x^2+(3-\beta)\cdot x-8\right]=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$4(\alpha+2)+(3-\beta)\cdot 2-8=0\Leftrightarrow$

$\beta=2\alpha+3 \quad (2)$

Από την σχέση (1) και με τη βοήθεια της (2) έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\alpha+2)\cdot x^2+(3-\beta)\cdot x-8}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\alpha+2)\cdot x^2+(3-2\alpha-3)\cdot x-8}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\alpha+2)\cdot x^2-2\alpha x-8}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha x^2+2x^2-2\alpha x-8}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha x(x-2)+2(x-2)(x+2)}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[\alpha x+2(x+2)\right]}{x-2}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\alpha x+2(x+2)\right]=6 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha+8=6 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=-1$$

Από (2) προκύπτει ότι $\beta=1$

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2} &, \quad x\neq 2\\ 6 &, \quad x=2\end{cases}$

είναι συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$.

Β2.

α) Για $x\neq 1$ ονομάζουμε $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{(x-1)^2}$ με $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

οπότε $f(x)=(x-1)^2\cdot g(x)-2$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)^2\cdot g(x)-2\right]=-2$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, θα ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2\cdot g(x)-2+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2\cdot g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot g(x)=0\cdot 3=0$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2)) \qquad (1)$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2) \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f(f(x_1))+f^3(x_1)=f(f(x_2))+f^3(x_2) \qquad (3)$$

Όμως, η σχέση της εκφώνησης γράφεται:

$$f\left(f\left(x\right)\right)+f^{3}\left(x\right)=2x+3, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Έτσι, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$2x_1+3=2x_2+3\Leftrightarrow$

$x_1=x_2$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι 1-1.

Γ2.

α)

- Για κάθε $x>0$ έχουμε:

  $f\left(g\left(x\right)-x\right)-f\left(\ln x+1\right)=0\Leftrightarrow$

  $f\left(g\left(x\right)-x\right)=f\left(\ln x+1\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

  $g\left(x\right)-x=\ln x+1\Leftrightarrow$

  $g\left(x\right)=x+\ln x+1$

- Έστω $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

  $x_1<x_2 \quad (1)$

  $x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow\ln x_1+1<\ln x_2+1 \quad (2)$

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

  $x_1+\ln x_1+1<x_2+\ln x_2+1\Rightarrow g\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$

  Άρα, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς και 1-1.

β) Η g είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το σύνολο τιμών της g, οπότε:

$$A_{g^{-1}}=g\left(A\right)=g\left(\left(0,+\infty\right)\right)\overset{\substack{g\,\text{συνεχής και}\\ g\,\text{γν.αύξουσα}}}{=}\left(\lim_{x\to0^{+}}g\left(x\right),\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)\right)$$

όπου $\lim\limits_{x\to0^{+}}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(x+\ln x+1\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+\ln x+1) = +\infty$$

Οπότε, το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το $A_{g^{-1}} = g(A) = (-\infty,+\infty)$

γ) Επειδή το $\frac{2018}{2017} \in g(A)$, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών προκύπτει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = \frac{2018}{2017}$.

Όμως η g είναι 1-1, οπότε προκύπτει ότι το x_0 είναι μοναδικό.

δ) Η εξίσωση γίνεται:

$$g^{-1}\left(3g\left(|x|+1\right)-4\right)=1 \Leftrightarrow$$
$$g\left(g^{-1}\left(3g\left(|x|+1\right)-4\right)\right)=g(1) \Leftrightarrow$$
$$3g\left(|x|+1\right)-4=2 \Leftrightarrow$$
$$3g\left(|x|+1\right)=6 \Leftrightarrow$$
$$g\left(|x|+1\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$g\left(|x|+1\right)=g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}$$
$$|x|+1=1 \Leftrightarrow$$
$$|x|=0 \Leftrightarrow$$
$$x=0$$

ε) Η ανίσωση γίνεται:

$$x^2-4<\ln\frac{x^2+7}{2x^2+3} \Rightarrow$$
$$x^2-4<\ln\left(x^2+7\right)-\ln\left(2x^2+3\right) \Rightarrow$$
$$\ln\left(2x^2+3\right)+x^2-4<\ln\left(x^2+7\right) \overset{+\left(x^2+7\right)}{\Rightarrow}$$
$$\ln\left(2x^2+3\right)+x^2-4+x^2+7<\ln\left(x^2+7\right)+x^2+7 \Rightarrow$$
$$\ln\left(2x^2+3\right)+2x^2+3<\ln\left(x^2+7\right)+x^2+7 \overset{+1}{\Rightarrow}$$
$$\ln\left(2x^2+3\right)+\left(2x^2+3\right)+1<\ln\left(x^2+7\right)+\left(x^2+7\right)+1 \Rightarrow$$

$g(2x^2+3)<g(x^2+7)\overset{g\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow}$

$2x^2+3<x^2+7\Rightarrow$

$x^2<4\Rightarrow$

$|x|<2\Rightarrow$

$-2<x<2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι f είναι γνησίως μονότονη. Άρα θα είναι $f:\nearrow$ ή $f:\searrow$.

Έστω $f:\nearrow$.Τότε για $\alpha<\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow 2\beta<2\alpha\Leftrightarrow\beta<\alpha$ Άτοπο.

Άρα $f:\searrow$.

Δ2. Έχουμε:

$2x=f(\beta)\eta\mu x+f(\alpha)\Leftrightarrow 2x-f(\beta)\eta\mu x-f(\alpha)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-2\alpha\cdot\eta\mu x-2\beta=0\Leftrightarrow x-\alpha\cdot\eta\mu x-\beta=0$

Έστω $g(x)=x-\alpha\cdot\eta\mu x-\beta$, $x\in\mathbb{R}$.

Για την g στο $[0,\alpha+\beta]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\alpha+\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και
- $g(0)=0-0-\beta=-\beta<0$, αφού $\beta>0$

  $g(\alpha+\beta)=\alpha+\beta-\alpha\cdot\eta\mu(\alpha+\beta)-\beta=\alpha(1-\eta\mu(\alpha+\beta))\geq 0$, αφού $\alpha>0$ και $\eta\mu(\alpha+\beta)\leq 1\Leftrightarrow 1-\eta\mu(\alpha+\beta)\geq 0$.

Οπότε προκύπτει $g(0)\cdot g(\alpha+\beta)\leq 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(\alpha+\beta)=0$, τότε ο $\alpha+\beta$ είναι ρίζα της g.
- Αν $g(\alpha+\beta)>0$, τότε $g(0)\cdot g(\alpha+\beta)<0$ οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\alpha+\beta)$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\alpha+\beta]$.

Δ3. Για την f στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $2\beta=f(\alpha)>f(\beta)=2\alpha$, δηλαδή $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

Επίσης,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\leq\alpha<\beta\\ \alpha<\beta\leq\beta\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}2\alpha<\alpha+\beta<2\beta\Leftrightarrow f(\beta)<\alpha+\beta<f(\alpha)$$

Άρα, από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta$.

Όμως η $f:\searrow$, άρα και $f:1-1$.

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta$.

Δ4. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=2x$. Δηλαδή $f(x)-2x=0$.

Θέτουμε $h(x)=f(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$, όπου h συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για την h στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε:

$h(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha=2\beta-2\alpha=2(\beta-\alpha)>0$

$h(\beta)=f(\beta)-2\beta=2\alpha-2\beta=2(\alpha-\beta)<0$, αφού $\alpha<\beta$.

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)-2x_1=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$.

Όμως $f:1-1$, άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Δ5. Ισχύει ότι:

$$\left|\frac{x\cdot f(x)\cdot \eta\mu x}{x^2+1}\right|=\frac{|x|\cdot|f(x)|\cdot|\eta\mu x|}{|x^2+1|}=\frac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}\cdot|\eta\mu x|.$$

Όμως

$$|\eta\mu x|\leq1\Leftrightarrow\frac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}\cdot|\eta\mu x|\leq\frac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}\Leftrightarrow\left|\frac{x\cdot f(x)\cdot\eta\mu x}{x^2+1}\right|\leq\frac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}.$$

Επίσης $|f(x)|\leq2017\Leftrightarrow\dfrac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}\leq\dfrac{|x|\cdot2017}{|x^2+1|}\Leftrightarrow\dfrac{|x|\cdot|f(x)|}{|x^2+1|}\leq\dfrac{2017\cdot|x|}{|x^2+1|}$.

Άρα $\left|\dfrac{x\cdot f(x)\cdot \eta\mu x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{2017\cdot|x|}{|x^2+1|}$.

Όμως $x^2+1>0$ και επομένως

$$\left|\frac{x\cdot f(x)\cdot \eta\mu x}{x^2+1}\right| \le \frac{2017\cdot|x|}{x^2+1}$$

Επομένως:

$$-\frac{2017\cdot|x|}{x^2+1} \le \frac{x\cdot f(x)\cdot \eta\mu x}{x^2+1} \le \frac{2017\cdot|x|}{x^2+1}$$

όπου

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2017\cdot|x|}{x^2+1}\right) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2017\cdot x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2017\cdot x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2017}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2017\cdot|x|}{x^2+1}\right) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2017\cdot x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2017\cdot x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2017}{x}\right) = 0$$

Άρα, από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\cdot f(x)\cdot \eta\mu x}{x^2+1}\right) = 0$.