ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .
ΟΝΟΜΑ: . . . .
ΤΜΗΜΑ: . . . .
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

04-11-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι 1-1 , είναι και γνησίως μονότονη.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν υπάρχουν, θα βρίσκονται πάντα πάνω στη διχοτόμο $y = x$.

β) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A_f$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και υπάρχει $x_0 \in \left(\alpha,\beta\right)$ ώστε $f\left(x_0\right)=0$, τότε θα ισχύει $f\left(\alpha\right)\cdot f\left(\beta\right)<0$.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\le \lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\left(\alpha+2\right)\cdot x^2+\left(3-\beta\right)\cdot x-8}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 6 & , \quad x=2 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο A_f .

Μονάδες 12

Β2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $x_o=1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)+2}{\left(x-1\right)^2}=3$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(1\right)=-2$

Μονάδες 6

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'\left(1\right)=0$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(f\left(x\right)\right)+f^3\left(x\right)-2x=3,\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 4

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(g\left(x\right)-x\right)-f\left(\ln x+1\right)=0,\ \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να δείξετε ότι είναι $g\left(x\right)=x+\ln x+1$ και ότι είναι 1-1.

Μονάδες 3

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g^{-1}\left(x\right)$

Μονάδες 4

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $g(x_0)=\frac{2018}{2017}$

Μονάδες 4

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}\left(3g(|x|+1)-4\right)=1$

Μονάδες 5

ε) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-4<\ln\frac{x^2+7}{2x^2+3}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$. Επίσης, συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και $|f(x)|\le 2017$, τότε:

Δ1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x=f(\beta)\eta\mu x+f(\alpha)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_o\in(0,\alpha+\beta]$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=2x$ σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_1\in(\alpha,\beta)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x\cdot f(x)\cdot\eta\mu x}{x^2+1}\right|\le\frac{2017\cdot|x|}{x^2+1}$ και έπειτα να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\cdot f(x)\cdot\eta\mu x}{x^2+1}\right)$.

Μονάδες 6

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ