Εξετάσεις 11 Ιουνίου 2018

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

(Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας-Πληροφορικής)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία – Απόδειξη σελ.217(παλιό σχολ. βιβλίο) ή σελ 99 (νέο σχολ. βιβλίο)

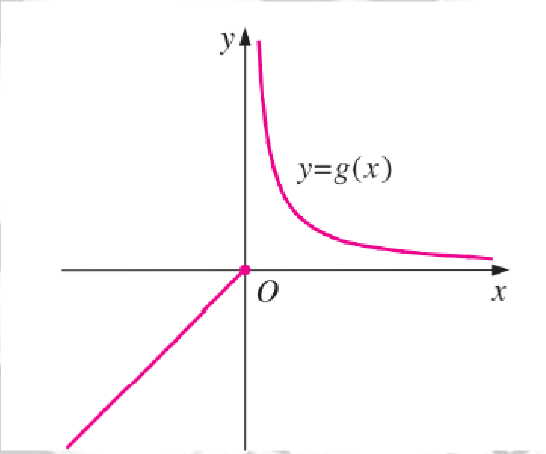
Α2. α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής (Ψ)

β) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ¨1-1¨ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει:

- Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με $f\left((0,+\infty)\right)=(0,+\infty)$.
- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα με $f\left((-\infty,0]\right)=(-\infty,0]$.

Δηλαδή η f είναι ¨1-1¨, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Α3. Θεωρία σελ.334 (παλιο σχολ. βιβλίο) ή σελ 216 (νέο σχολ. βιβλίο).

Α4. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1-4\left(x^{-2}\right)'=1+8x^{-3}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		-		-	0	+	
x^3+8		-	0	+		+	
$\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o$		+		-	‖	+	

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$		↗	0	↘	‖	↗	
			Τ.Μ.				

Η f παρουσιάζει στο $x_o=-2$ τοπικό μέγιστο, το $f(-2)=-2-\frac{4}{4}=-2-1=-3$.

B2. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f''(x)=\left(1+\frac{8}{x^3}\right)'=-\frac{24}{x^4}<0 \ , \ x\in\mathbb{R}^*$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f για την κυρτότητα :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	‖	-	
$f'(x)$	0	↘	‖	↘	
$f(x)$		∩	‖	∩	

Η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Η f δεν έχει σημεία καμπής.

B3. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$ και πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

• Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^2} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Για να είναι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) αρκεί τα όρια $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί

(αντίστοιχα $\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0, \text{ οπότε } \beta = 0$$

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

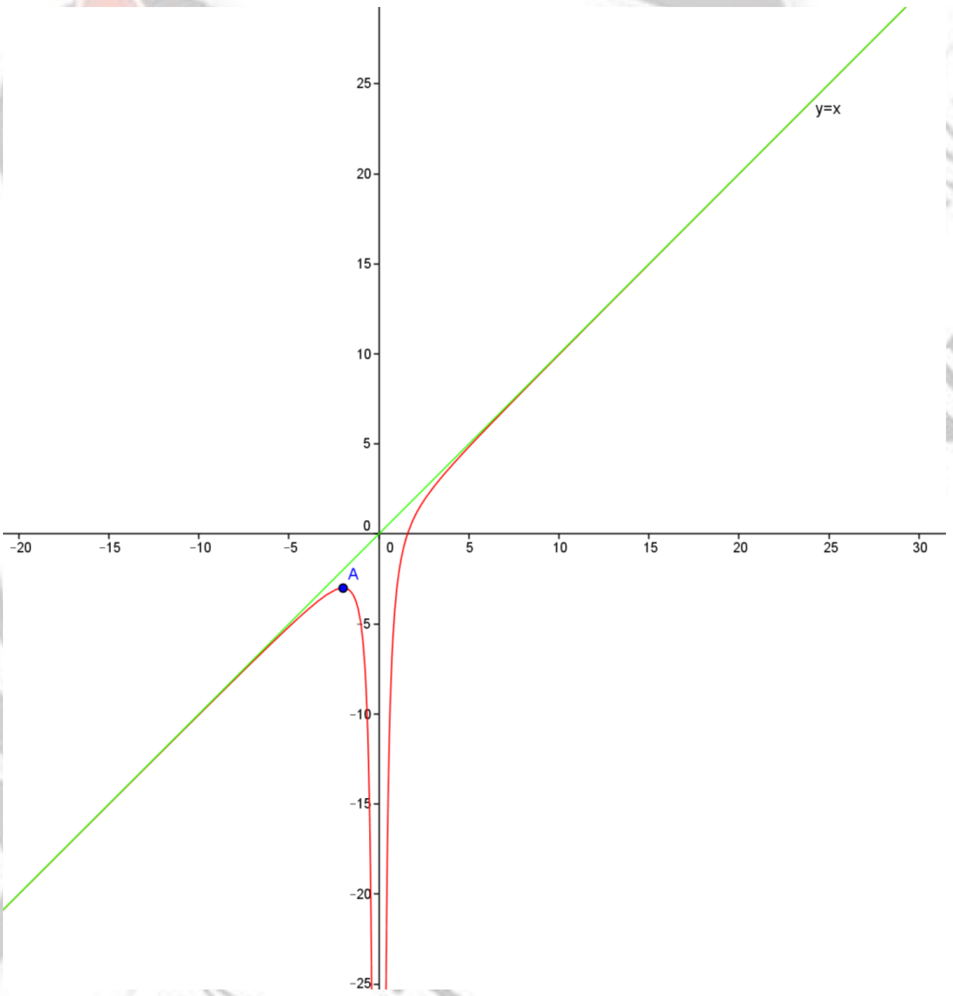
Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, οπότε $\lambda=1$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=0$, οπότε $\beta=0$

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Β4. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η εξής:



ΘΕΜΑ Γ

Έστω $l = 8m$, τετράγωνο περιμέτρου x και κύκλος περιμέτρου $8-x$. Τότε ισχύει:

- Πλευρά τετραγώνου: $a = \frac{x}{4}$
- Ακτίνα κύκλου: $\rho = \frac{8-x}{2\pi}$ (αφού $L = 2\pi\rho = 8-x$), όπου $0 < x < 8$

Γ1. Έστω $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$ και $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}$, τότε το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από την σχέση: $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$, όπου:

- $\mathrm{E}_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$
- $E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}$

Άρα: $\mathrm{E}(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, για $x \in (0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη πολυωνυμική συνάρτηση, με:

$$\mathrm{E}'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 32}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi}$$

Άρα:

- $\mathrm{E}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$
- $\mathrm{E}'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi} > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$
- $\mathrm{E}'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi} < 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{\pi+4}$

Επομένως, προκύπτει:

x	$-\infty$ 0	$\frac{32}{\pi+4}$		8 $+\infty$
E'		-	+	
E		↘	↗	

Ο.Ε.

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_o = \dfrac{32}{\pi+4}$, την τιμή

$\mathrm{E}\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \ldots = \dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)}$.

Επίσης, για $x_o = \dfrac{32}{\pi+4}$, παρατηρούμε ότι:

- Πλευρά τετραγώνου: $a = \dfrac{x_o}{4} = \dfrac{8}{\pi+4}$
- Διάμετρος κύκλου: $\delta = 2\rho = 2\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$

Άρα, πράγματι το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνει ίση με την διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρχικά θα υπολογίσουμε τα όρια στα άκρα του διαστήματος $(0,8)$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{0-0+256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$
- $\lim\limits_{x\to 8^-} \mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{64(\pi+4)-512+256}{16\pi} = 4$

Άρα, για $x \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$, επειδή η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα ισχύει:

$\mathrm{E}\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[\dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)}, \dfrac{16}{\pi}\right)$. Όμως:

- $\dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)} < 5 \Leftrightarrow 16(\pi+4) - 64 < 5\pi(\pi+4) \Leftrightarrow 5\pi^2 + 4\pi > 0$, ισχύει.
- $5 < \dfrac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi < 16$, ισχύει (αφού $3,1 < \pi < 3,2 \Leftrightarrow 15,5 < 5\pi < 16$)

Άρα, $5 \in \mathrm{E}\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right)$ τέτοιο ώστε

$\mathrm{E}(x_1) = 5$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα, άρα x_1 μοναδική ρίζα.

Ομοίως, για $x \in \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$, επειδή η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα ισχύει:

$\mathrm{E}\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[\frac{16}{\pi} - \frac{64}{\pi(\pi+4)}, 4\right)$. Όμως: $4 < 5$, άρα $5 \not\in \mathrm{E}\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right)$, άρα η $\mathrm{E}(x) = 5$ είναι αδύνατη στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Τελικά, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right) \subseteq (0,8)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}(x_1) = 5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - \mathrm{x}^2, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 1.$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - \mathrm{x}^2\right)' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - 2\mathrm{x} = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - \mathrm{x}\right), \ \mathrm{x} \in \mathbb{R}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - \mathrm{x}\right)' = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - 1\right), \ \mathrm{x} \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{x} - \alpha = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \alpha$$

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{x} - \alpha > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} > \alpha$$

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} - 1 < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{x} - \alpha < 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} < \alpha$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\mathrm{f}''(x)$	-	0	+
$\mathrm{f}(x)$	∩		∪

Σ.Κ.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, \alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$ και ορίζεται η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\alpha, \mathrm{f}(\alpha))$, οπότε έχουμε σημείο καμπής το $(\alpha, \mathrm{f}(\alpha))$ ή $(\alpha, 2-\alpha^2)$.

Δ2. Από τα προηγούμενα έχουμε:

x	$-\infty$ α $+\infty$	
$f''(x)$	-	0 +
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Ο.Ε.

Σύνολο τιμών της f ’

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f' \text{ συνεχής στο } A_1=(-\infty,\alpha] \\ \\ f'\searrow A_1=(-\infty,\alpha]\end{array}\right\}\Rightarrow f'(A_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$$

επειδή $f'(\alpha)=2(1-\alpha)<0 \quad (\text{αφού } \alpha>1)$

και

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f' \text{ συνεχής στο } A_2=(\alpha,+\infty) \\ \\ f'\nearrow A_2=(\alpha,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow f'(A_2)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left(2(1-\alpha),+\infty\right)$$

επειδή $\lim_{x\to\alpha^+}f'(x)=f'(\alpha)=2(1-\alpha)<0 \quad (\text{αφού } \alpha>1)$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right)=2\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right] \quad (1)$$

όπου $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\alpha}}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-\alpha}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$

Από (1) έχουμε $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } 0\in f'(A_1) \\ \\ f'\searrow A_1=(-\infty,\alpha]\end{array}\right\}\Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_1\in A_1=(-\infty,\alpha] \text{ ώστε}: f'(x_1)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } 0\in f'(A_2) \\ \\ f'\searrow A_1=(\alpha,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_2\in A_2=(\alpha,+\infty) \text{ ώστε}: f'(x_2)=0$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	x_1		α		x_2	$+\infty$
$f''(x)$	-		-	0	+		+
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗
		Τ.Μ.				Τ.Ε.	

- Για κάθε $x\in(-\infty,x_1]$ έχουμε: $x\le x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)\ge f'(x_1)\Rightarrow f'(x)\ge 0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$.

- Για κάθε $x\in(x_1,\alpha)$ έχουμε: $x> x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_1)\Rightarrow f'(x)< 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1,α).

- Για κάθε $x\in[\alpha,x_2)$ έχουμε: $x< x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)< 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2)$.

- Για κάθε $x\in[x_2,+\infty)$ έχουμε: $x\ge x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)\ge f'(x_2)\Rightarrow f'(x)\ge 0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$.

Οπότε έχουμε: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$

Η f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ και στο x_2 τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$.

Δ3. **<u>α’ τρόπος</u>**

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2), άρα και 1-1. Επίσης, έχουμε:

$\alpha > 1 \Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} < 2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(1) < f'(x_1) \overset{f':\searrow \text{ στο } (-\infty,\alpha]}{\Leftrightarrow} 1 > x_1$

Άρα $1 \in (x_1, x_2)$ με $x_1 < 1 < \alpha < x_2$.

Άρα, για $x \in (a, x_2)$ έχουμε:

‘Οπότε $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \notin (\alpha, x_2)$ (αφού $\alpha > 1$)

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

<u>β’ τρόπος</u>

Αρχικά θα δείξουμε ότι $x_1 < 1$

Υποθέτουμε ότι $x_1 \geq 1$, τότε:

$x_1 \geq 1 \overset{f'\searrow[1,x_1]}{\Rightarrow} f'(x_1) \leq f'(1) \Rightarrow 0 \leq f'(1) \Rightarrow 0 \leq 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right)$

$\Rightarrow 0 \leq e^{1-\alpha} - 1 \Rightarrow 1 \leq e^{1-\alpha} \Rightarrow 0 \leq 1-\alpha \Rightarrow \alpha \leq 1$ άτοπο

Άρα $x_1 < 1$

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, x_2)$, οπότε:

$$f(x_0) = f(1)$$

Για την f στο $[1, x_0]$ έχουμε:

Η f συνεχής στο $[1, x_0]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$ και

$f(1) = f(x_0)$

Άρα από θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$ άτοπο, επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \supseteq (1, x_0)$.

Δ4. Για $\alpha = 2$ έχουμε: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y + 2 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Δείξαμε στο Δ1 ότι η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$, για κάθε $x \geq 2$ η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία της εφαπτομένης με εξαίρεση το σημείο επαφής $(2, f(2))$, οπότε:

$$f(x) \geq -2x + 2 \overset{\sqrt{x-2} \geq 0}{\Rightarrow} f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, οπότε:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx \quad (2)$$

Θα υπολογίσουμε το $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx$

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = t \Leftrightarrow x - 2 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 + 2$

Άρα $(x)' dx = (t^2+2)dt \Rightarrow dx = 2tdt$

Για $x = 2$: $t = 0$

Για $x = 3$: $t = 1$

Οπότε $-2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx = -2\int_0^1 (t^2+2-1)\cdot t \cdot 2tdt = -4\int_0^1 (t^2+1)t^2 dt =$

$$= -4\int_0^1 (t^4 + t^2)dt = -4\left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) - 0 = -4\left(\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = -\frac{32}{15}$$

Επομένως, από (2) προκύπτει ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$$