ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (iii), σελ.144 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός, σελ. 15 σχολικού βιβλίου

Α3. Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $f(x)=\alpha \cdot x^2+\beta$ με $\alpha,\beta>0$, άρα έχουμε: $f'(x)=2\alpha \cdot x$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει μορφή ευθείας με θετική κλίση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (εικόνα **(Τ)**).

Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $g(x)=|\alpha \cdot x|=\begin{cases}\alpha \cdot x & ,x\geq 0\\ -\alpha \cdot x & ,x<0\end{cases}$ με $\alpha>0$, άρα έχουμε: $g(x)=\begin{cases}\alpha & ,x>0\\ -\alpha & ,x<0\end{cases}$.
Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει σταθερή θετική τιμή για κάθε $x>0$ και σταθερή αρνητική τιμή για κάθε $x<0$ (εικόνα **(Η)**).

Άρα, τελικά η αντιστοίχιση είναι:

$$(f)\to(T)$$
$$(g)\to(H)$$

Α4. «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».

α) Ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα:

σελ. 62 σχολικού βιβλίου, 2ο παράδειγμα

Α5.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x>1$: $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ συνεχής ως ρητή.

Για $x<1$: $f(x)=x^2+\alpha$ συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα, πρέπει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

όμως:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{1+1}{1}=2$$

Άρα: $1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$.

Β2. Γνωρίζουμε από το (Β1) ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Επίσης, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\frac{1}{2},1\right),(1,4)$ με

$f'(x)=2x$ και $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ αντίστοιχα.

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη και στο 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},4\right)$. Άρα, δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle.

B3. Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f'(x)=-\frac{1}{4}$.

Όμως, $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & ,x>1\\ 2x & ,x<1\end{cases}$.

- Άρα, για $x<1$:

  $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}<1$ δεκτή.

- Για $x>1$:

  $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}x=2>1 \text{ δεκτή}\\ \text{ή}\\ x=-2<1, \text{ απορ.}\end{cases}$

Επομένως, υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις, οι $x_0=-\frac{1}{8}$ και $x_1=2$.

Για $x_0=-\frac{1}{8}$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

Για $x_1=2$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$$

B4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πρέπει να αναζητήσουμε αν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Για την περιοχή του $+\infty$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$, άρα η ευθεία $y=1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Για την περιοχή του $-\infty$ έχουμε:

- Η f δίνεται από την σχέση $f(x) = x^2+1$, δηλαδή είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και επομένως δεν παρουσιάζει πλάγια ασύμπτωτη.

Πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Έχουμε: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & ,x>1 \\ 2x & ,x<1 \end{cases}$

Άρα, για $x>1$:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f: \searrow$ στο $(1,+\infty)$.

Για $x<1$:

$f'(x) = 2x$ με:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$

Άρα, $f: \searrow$ στο $(-\infty,0)$, $f: \nearrow$ στο $(0,1)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ την τιμή $f(0)=1$.

Επίσης, πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

Όμως, $f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & ,x>1 \\ 2 & ,x<1 \end{cases}$. Άρα:

Για $x>1$: $f''(x)=\dfrac{1}{x^4}>0 \Rightarrow f:\cup$ στο $(1,+\infty)$.

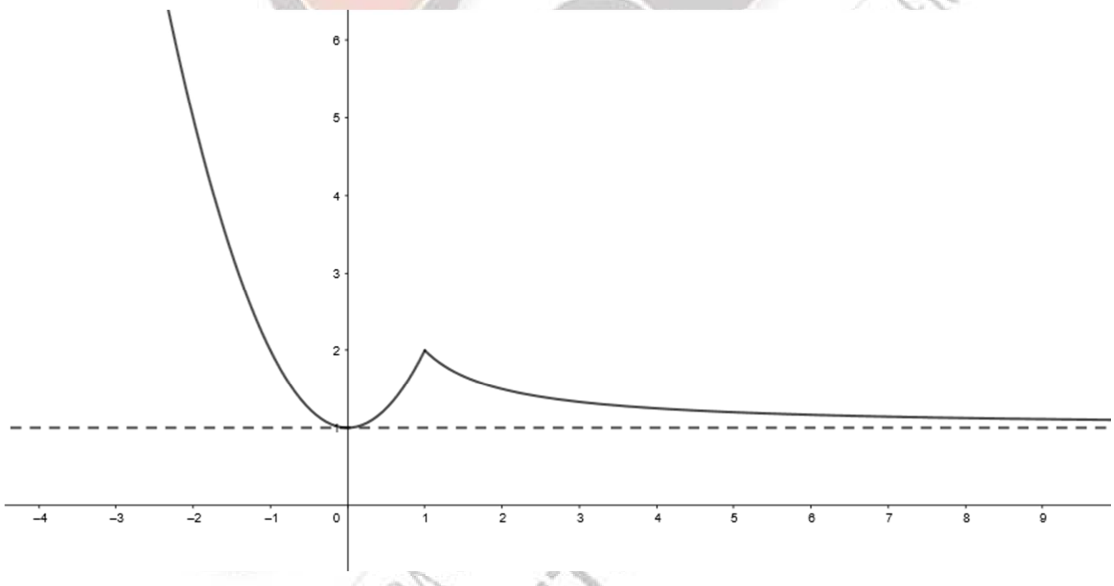
Για $x<1$: $f''(x)=2>0 \Rightarrow f:\cup$ στο $(-\infty,1)$.

Επίσης, η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Άρα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	+	+	+	
f'	−	+	−	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Άρα, προκύπτει η γραφική παράσταση:



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$f(x)=2\eta\mu x-x$ με $x\in[0,\pi]$

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου: $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$

Όμως:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Όμως, $x \in [0,\pi]$ άρα πρέπει:

$$0 \le 2k\pi+\frac{\pi}{3} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 6k\pi+\pi \le 3\pi \Leftrightarrow -\pi \le 6k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{1}{3} \Rightarrow k=0$$

Άρα $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ μοναδική λύση στο $[0,\pi]$.

Επίσης, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu x:\searrow \text{ στο } [0,\pi]}{\Leftrightarrow} x<\frac{\pi}{3}$

Και $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1<0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu x:\searrow \text{ στο } [0,\pi]}{\Leftrightarrow} x>\frac{\pi}{3}$

Άρα, έχουμε:

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$+\infty$
f'		$+$	$-$		
f		$\nearrow$	$\searrow$		

$f(0)=0 \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} \qquad f(\pi)=-\pi$

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ την τιμή $f(0)=0$, ολικό μέγιστο για $x=\frac{\pi}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ και ολικό ελάχιστο για $x=\pi$ την τιμή $f(\pi)=-\pi$.

Γ2. Έστω σημείο x_o , τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την σχέση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y=f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$ έχει μοναδική λύση.

Προφανής λύση για $x=x_o$ αφού: $\cancel{f(x_o)} = f'(x_o)\cancel{(x_o-x_o)} + \cancel{f(x_o)} \Leftrightarrow 0=0$

Έστω $x \neq x_o$, τότε:

$$f(x)=f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o) \Leftrightarrow f(x)-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o) \text{ (σχέση 1)}$$

Όμως, η f :συνεχής στο $[x_o,x]$, και παραγωγίσιμη στο (x_o,x), άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_o,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Δηλαδή, από (σχέση 1) έχουμε: $f'(\xi)=f'(x_o)$

Επίσης, $f''(x)=-2\eta\mu x \leq 0$ στο $[0,\pi] \Rightarrow f' : \searrow$ στο $[0,\pi] \Rightarrow f$:¨1−1¨ στο $[0,\pi]$

Άρα: $f'(\xi)=f'(x_o) \Rightarrow \xi = x$ άτοπο, αφού $\xi \in (x_o,x)$.

Επομένως, μοναδική λύση της εξίσωσης $x=x_o$. Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την εφαπτόμενη ευθεία στο τυχαίο σημείο $A(x_o,f(x_o))$.

(**Υποσημείωση:** θα μπορούσαμε αφού $f''(x)=-2\eta\mu x<0$ στο $(0,\pi)$, απευθείας ότι η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$, συνεπώς η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της $x_0 \in [0,\pi]$ βρίσκεται πάνω από την C_f εκτός του σημείου x_0.)

Γ3. Έχουμε:

$$I=\int_0^\pi (f(x)\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_0^\pi ((2\eta\mu x - x)\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_0^\pi (2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx=$$

$$=\int_0^\pi (2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx-\int_0^\pi (x\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx$$

Όμως:

$$\int_0^\pi (2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx=\left[\eta\mu^2 x\right]_0^\pi=\eta\mu^2\pi-\eta\mu^2 0=0-0=0$$

Και

$$\int_0^\pi (x\cdot\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_0^\pi \left(x\cdot(\eta\mu x)'\right)dx=\left[x\cdot\eta\mu x\right]_o^\pi-\int_0^\pi \eta\mu x dx=$$

$$= \pi \cdot \eta\mu\pi - 0 \cdot \eta\mu 0 + \int_0^{\pi} -\eta\mu x dx = 0 - 0 + \int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x)' dx = [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 - 1 = -2$$

Άρα: $I = 0 - (-2) = 2$.

Γ4. α) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x} - \dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1\right) =$

$= 2\cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x) - f(2x)\right)\ln x\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(2\eta\mu x - x - 2\eta\mu 2x + 2x\right)\ln x\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(2\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + x\right)\ln x\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{2\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + x}{x}\right)x\ln x\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 2\frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{x}{x}\right)x\ln x\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 4\frac{\eta\mu 2x}{2x} + 1\right)x\ln x\right] = L$$

Όμως:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu 2x}{2x} \underset{\omega\to 0}{\overset{2x=\omega}{=}} \lim\limits_{\omega\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

Άρα:

$$L = (2\cdot 1 - 4\cdot 1 + 1)\cdot 0 = 0$$

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow x - (x+1)\ln(x+1) < 0 \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-(x+1)\cdot\ln(x+1)$

Είναι: $g'(x)=1-\ln(x+1)-\cancel{(x+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{x+1}}=-\ln(x+1)$

Όμως $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow \ln(x+1)>\ln 1\Leftrightarrow \ln(x+1)>0\Leftrightarrow -\ln(x+1)<0$, άρα $g'(x)<0\Rightarrow g$ φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Επομένως, $g((0,+\infty))\overset{g\text{ φθίνουσα}}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)=(-\infty,0)$

επειδή,

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x+1)\ln(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(1-\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}\right)\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-(x+1)\ln(x+1)\right)=0-1\cdot 0=0$

Επομένως η g(x) παίρνει μόνο αρνητικές τιμές, δηλαδή g(x)<0.

Δ2. $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}=\dfrac{-\ln(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}=\dfrac{g(x)}{x^2\cdot(x+1)}<0$, αφού από **Δ1**, g(x)<0.

άρα, η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα:

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(0,1)$, διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(x)+1>2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln\left(f(x)+1\right)>f(x)\cdot \ln 2 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln\left(f(x)+1\right)}{f(x)}>\ln 2 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)>f\left(1\right) \overset{f\ \text{φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)<1$$

που ισχύει αφού $f\left(A\right)=\left(0,1\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=x\left(x-2\right)f(\alpha)+x\left(x-1\right)f^{-1}(\alpha)+\left(x-1\right)\left(x-2\right)\eta\mu(\alpha\pi) \quad \text{με } x\in\mathbb{R}, 0<\alpha<1$$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως πολυωνυμική και

- $h(0)=2\eta\mu\left(\alpha\pi\right)>0$, αφού $0<\alpha<1 \Rightarrow 0<\alpha\pi<\pi$
- $h(1)=-f(\alpha)<0$, αφού $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$

Επομένως η h ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ ως πολυωνυμική και

- $h(1)=-f(\alpha)<0$, αφού $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$
- $h(2)=f^{-1}\left(\alpha\right)>0$, αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το $\left(0,+\infty\right)$.

Επομένως η h ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.
Όμως η συνάρτηση h είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού, επομένως έχει το πολύ 2 ρίζες.
Συνεπώς έχουμε ακριβώς δύο ρίζες, από μία στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$ αντίστοιχα.

Δ5. Η F είναι συνεχής στο $\left[1,e\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(1,e\right)$ με $F'(x)=f(x)$ γνησίως φθίνουσα. Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(1,e\right)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}$$

Ισχύει:

$$1<\xi<e \overset{f\ \text{φθίνουσα}}{\Rightarrow} f(1)>f(\xi)>f(e) \Rightarrow \ln 2>\frac{e\ln 2-F(1)}{e-1}>\frac{\ln\left(e+1\right)}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e-1\right)\ln 2>e\ln 2-F(1)>\frac{\left(e-1\right)\ln\left(e+1\right)}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e-1\right)\ln 2-e\ln 2>-F(1)>\frac{\left(e-1\right)\ln\left(e+1\right)}{e}-e\ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2<F(1)<\frac{e^2\ln 2-\left(e-1\right)\ln\left(e+1\right)}{e}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)\Leftrightarrow\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln 2^{e+1}-\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<e\ln 2^{e+1}-e\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<(e+1)e\ln 2-e\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^2\ln 2}\cancel{-e\ln(e+1)}+\ln(e+1)<\cancel{e^2\ln 2}+e\ln 2\cancel{-e\ln(e+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1)<e\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1)<\ln 2^e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e+1<2^e,\quad \text{που ισχύει}$$