

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (iii), σελ.144 σχολικού βιβλίου

A2. Ορισμός, σελ. 15 σχολικού βιβλίου

A3. Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta$ με $\alpha, \beta > 0$, άρα έχουμε: $f'(x) = 2\alpha \cdot x$.
Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει μορφή ευθείας με θετική κλίση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (εικόνα **(Τ)**).

Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g , καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $g(x) = |\alpha \cdot x| = \begin{cases} \alpha \cdot x, & x \geq 0 \\ -\alpha \cdot x, & x < 0 \end{cases}$ με $\alpha > 0$, άρα έχουμε:

$g(x) = \begin{cases} \alpha & , x > 0 \\ -\alpha & , x < 0 \end{cases}$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει σταθερή θετική

τιμή για κάθε $x > 0$ και σταθερή αρνητική τιμή για κάθε $x < 0$ (εικόνα **(Η)**).

Άρα, τελικά η αντιστοίχιση είναι:

$$(f) \rightarrow (T)$$

$$(g) \rightarrow (H)$$

A4. «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0 \text{.} \text{»}$$

α) Ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα:

σελ. 62 σχολικού βιβλίου, 2^ο παράδειγμα

A5.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x > 1$: $f(x) = \frac{x+1}{x}$ συνεχής ως ρητή.

Για $x < 1$: $f(x) = x^2 + \alpha$ συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα, πρέπει $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

όμως:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x} \right) = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\text{Άρα: } 1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

B2. Γνωρίζουμε από το (B1) ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$.

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1 - 2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1$$

Δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, και επομένως δεν είναι

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 4 \right)$. Άρα, δεν ισχύουν οι συνέπειες του Rolle.

B3. Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Όμως, } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & , x > 1 \\ 2x & , x < 1 \end{cases}.$$

• Άρα, για $x < 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8} < 1 \text{ δεκτή.}$$

• Για $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 > 1 \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ x = -2 < 1, \text{ απορ.} \end{cases}$$

Επομένως, υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις, οι $x_0 = -\frac{1}{8}$ και $x_1 = 2$.

Για $x_0 = -\frac{1}{8}$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}$$

Για $x_1 = 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

B4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πρέπει να αναζητήσουμε αν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Για την περιοχή του $+\infty$ έχουμε:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$, άρα η ευθεία $y = 1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Για την περιοχή του $-\infty$ έχουμε:

• Η f δίνεται από την σχέση $f(x) = x^2 + 1$, δηλαδή είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και επομένως δεν παρουσιάζει πλάγια ασύμπτωτη.

Πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & , x > 1 \\ 2x & , x < 1 \end{cases}$$

Άρα, για $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f : \searrow \text{ στο } (1, +\infty).$$

Για $x < 1$:

$$f'(x) = 2x \text{ με:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Άρα, $f : \searrow$ στο $(-\infty, 0)$, $f : \nearrow$ στο $(0, 1)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 1$.

Επίσης, πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

$$\text{Όμως, } f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & , x > 1 \\ 2 & , x < 1 \end{cases} . \text{ Άρα:}$$

$$\text{Για } x > 1: f''(x) = \frac{1}{x^4} > 0 \Rightarrow f : \cup \text{ στο } (1, +\infty).$$

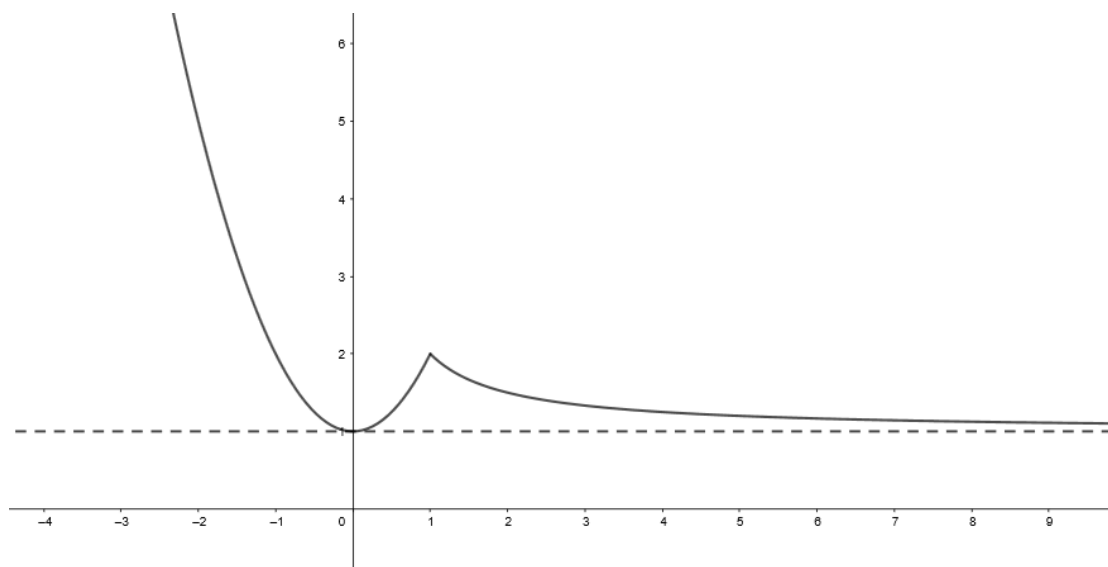
$$\text{Για } x < 1: f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f : \cup \text{ στο } (-\infty, 1).$$

Επίσης, η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Άρα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	+	+	+	
f'	-	+	-	
f	\searrow	\nearrow	\searrow	

Άρα, προκύπτει η γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$ για $x \in (1, +\infty)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Όπου:

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 1, \text{ άρα } f : \nearrow \text{ στο } (1, +\infty).$$

Επομένως, η f είναι "1-1", άρα και αντιστρέψιμη. Επίσης, ισχύει:

$$A_{f^{-1}} = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (e, +\infty) \text{ αφού:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{e^x}{x} \right) = \frac{e}{1} = e$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{1} \right) = +\infty$

Γ2. Έχουμε:

$$\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} - \frac{\eta\mu a - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)f(a) + x(x-1)f^{-1}(a) - (x-1)(x-2)(\eta\mu a - 2) = 0$$

Έστω: $g(x) = x(x-2)f(a) + x(x-1)f^{-1}(a) - (x-1)(x-2)(\eta\mu a - 2)$, τότε:

$$\left. \begin{array}{l} g : \text{συνεχής στο } [0,1] \\ g(0) = -2(\eta\mu a - 2) > 0 \\ g(1) = -f(a) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0 \Rightarrow \text{από θεώρημα Bolzano,}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Επίσης,

$$\left. \begin{array}{l} g : \text{συνεχής στο } [1,2] \\ g(1) = -f(a) < 0 \\ g(2) = 2f^{-1}(a) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(1) \cdot g(2) < 0 \Rightarrow \text{από θεώρημα Bolzano, υπάρχει}$$

τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$.

Άρα, η συνάρτηση g έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως, η συνάρτηση g είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού, επομένως έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα, αναγκαστικά έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Επομένως, η εξίσωση $\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} - \frac{\eta\mu a - 2}{x} = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Γ3. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) + 1 > e + \ln f(x) &\Leftrightarrow f(x) - \ln f(x) > e - 1 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} - \ln f(x) > e - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^{f(x)}}{f(x)} \right) > e - 1 \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)} > e^{e-1} \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)} > \frac{e^e}{e} \Leftrightarrow f(f(x)) > f(e) \Leftrightarrow f(x) > e \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x > 1$, αφού γνωρίζουμε από το ερώτημα Γ1 το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = 2\eta\mu x - x \text{ με } x \in [0, \pi]$$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου: $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

Όμως:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Όμως, $x \in [0, \pi]$ άρα πρέπει:

$$0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 6k\pi + \pi \leq 3\pi \Leftrightarrow -\pi \leq 6k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{3} \Rightarrow k = 0$$

Άρα $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ μοναδική λύση στο $[0, \pi]$.

$$\text{Επίσης, } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \stackrel{\text{συνx: } \searrow \text{ στο } [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x < \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Και } f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \stackrel{\text{συνx: } \searrow \text{ στο } [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x > \frac{\pi}{3}$$

Άρα, έχουμε:

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$+\infty$
f'			+	-	
f			↗	↘	

$$f(0) = 0 \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \quad f(\pi) = -\pi$$

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$

, ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2$ και ολικό ελάχιστο για

$x = \pi$ την τιμή $f(\pi) = -\pi$.

Δ2. Έστω σημείο x_0 , τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την

$$\text{σχέση } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ έχει μοναδική λύση.

Προφανής λύση για $x = x_0$ αφού: $f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow 0 = 0$

Έστω $x \neq x_0$, τότε:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ (σχέση 1)}$$

Όμως, η f : συνεχής στο $[x_0, x]$, και παραγωγίσιμη στο (x_0, x) , άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Δηλαδή, από (σχέση 1) έχουμε: $f'(\xi) = f'(x_0)$

Επίσης,

$$f''(x) = -2\eta\mu x \leq 0 \text{ στο } [0, \pi] \Rightarrow f' : \searrow \text{ στο } [0, \pi] \Rightarrow f : \text{"1-1"} \text{ στο } [0, \pi]$$

Άρα: $f'(\xi) = f'(x_0) \Rightarrow \xi = x$ άτοπο, αφού $\xi \in (x_0, x)$.

Επομένως, μοναδική λύση της εξίσωσης $x = x_0$. Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την εφαπτόμενη ευθεία στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Δ3. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (f(x) \sigma\upsilon\nu x) dx = \int_0^\pi ((2\eta\mu x - x) \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx = \int_0^\pi (2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx = \\ &= \int_0^\pi (2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx - \int_0^\pi (x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx \end{aligned}$$

Όμως:

$$\int_0^\pi (2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx = [\eta\mu^2 x]_0^\pi = \eta\mu^2 \pi - \eta\mu^2 0 = 0 - 0 = 0$$

Και

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx &= \int_0^\pi (x \cdot (\eta\mu x)') dx = [x \cdot \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi \eta\mu x dx = \\ &= \pi \cdot \eta\mu\pi - 0 \cdot \eta\mu 0 + \int_0^\pi -\eta\mu x dx = 0 - 0 + \int_0^\pi (\sigma\upsilon\nu x)' dx = [\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = \\ &= \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Άρα: $I = 0 - (-2) = 2$.

Δ4.

α) Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) =$
 $= 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$, επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \ln x] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\eta\mu x - x - 2\eta\mu 2x + 2x) \ln x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + x) \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{2\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + x}{x} \right) x \ln x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - 2 \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{x}{x} \right) x \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - 4 \frac{\eta\mu 2x}{2x} + 1 \right) x \ln x \right] = L \end{aligned}$$

Όμως:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{2x=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

Άρα:

$$L = (2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1) \cdot 0 = 0$$