Πανελλαδικές Εξετάσεις

9 Ιουνίου 2017

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Δ’ Τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422

www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου / σελίδα 135 (νέο βιβλίο) ή σελίδα 253 (παλιό βιβλίο)

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου / σελίδα 73 (νέο βιβλίο) ή σελίδα 191 (παλιό βιβλίο)

Α3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+\beta, & x\le 0 \\ x+5, & x>0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική και εφόσον είναι συνεχής στο R θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \beta=5$$

Β2.

Το $x=0$ είναι σημείο αλλαγής του τύπου της f, οπότε θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα σε αυτό με τον ορισμό.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+5-5}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+5-5}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$.

Β3.

$f(-1)=1-1+5=5$

Για $x<0$: $f'(x)=2x+1$ και $f'(-1)=-1$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(-1,f(-1))$ είναι:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow$$
$$y-5=-x-1\Leftrightarrow$$
$$y=-x+4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι:

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\left\{x\neq 2 \,/\, \frac{3-5x}{x-2}\geq 1\right\}$$

Οπότε $\frac{3-5x}{x-2}\geq 1\Leftrightarrow \frac{3-5x}{x-2}-1\geq 0\Leftrightarrow \frac{3-5x-x+2}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{5-6x}{x-2}\geq 0$

x	$-\infty$ 5/6		2 $+\infty$
x-2	-	-	+
5-6x	+ 0	-	-
Γινόμενο	- 0	+	-

Άρα $A_{f\circ g}=[\frac{5}{6},2)\neq\varnothing$, ορίζεται η σύνθεση και έχει τύπο

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\frac{3-5x}{x-2}-1}=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}$$

Γ2.

Η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}$ είναι συνεχής στο $[\frac{5}{6},2)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

και $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\left(\frac{5-6x}{x-2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\frac{7}{(x-2)^2}>0$

Άρα, η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{5}{6},2)$ και έχει ελάχιστη τιμή $\varphi(\frac{5}{6})=0$.

Γ3.

Εφόσον η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[\frac{5}{6},2)$, άρα είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Θα ορίσουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, το οποίο είναι το σύνολο τιμών της $\varphi(x)$,

και επειδή είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $\varphi(\Delta) = A_{\varphi^{-1}} = [\varphi\left(\frac{5}{6}\right), \lim\limits_{x\to 2^-}\varphi(x))$

όπου $\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$ και

$$\lim_{x\to 2^-}\varphi(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{5-6x}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\left((5-6x)\cdot\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}(5-6x) = -7$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2) = 0\\ x<2 \Leftrightarrow x-2<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$

Οπότε $A_{\varphi^{-1}} = [0,+\infty)$

Για να βρούμε την αντίστροφη της φ θέτουμε $y=\varphi(x)$ και λύνουμε ως προς x.

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{5-6x}{x-2} = y \Leftrightarrow x = \frac{2y+5}{y+6} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = \frac{2y+5}{y+6}, \quad y\in[0,+\infty)$$

Θέτουμε όπου y το x και προκύπτει:

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x+6}, \quad x\in[0,+\infty)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \begin{cases}\sqrt{-x}, & x\in[-1,0)\\ \eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$.

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο σημείο αλλαγής του τύπου της $x_0 = 0$ με τον ορισμό.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x} = 0$$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \eta\mu 0 = 0$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και κατά συνέπεια είναι συνεχής και στο πεδίο ορισμού της το $[-1,\pi]$.

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζει η πρώτη παράγωγος ή δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος (όντας όμως συνεχής)

Εξετάζουμε με τον ορισμό αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{-\left(\sqrt{-x}\right)^2} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

Οπότε, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Για $x \in [-1,0)$, $f(x) = \sqrt{-x}$ και $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$

Για $x \in (0,\pi]$, $f(x) = \eta\mu x$ και $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Δ2.

Για $x \in [-1,0)$ έχουμε $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$

Για $x \in (0,\pi]$ έχουμε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x \le \pi$$

x	-1		0		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
	ΤΜ		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Στο $x_1=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$

Στο $x_2=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Στο $x_3=\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Στο $x_4=\pi$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi)=0$

Άρα, η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την τιμή 0 και μέγιστη τιμή την τιμή 1.

Δ3.

Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι

$\varepsilon:\ y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Το σημείο $M(0,3)$ ανήκει στην ε, άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, οπότε:

$$3-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(0-x_0)\Leftrightarrow$$
$$3-f(x_0)=-x_0\cdot f'(x_0)\Leftrightarrow$$
$$x_0\cdot f'(x_0)-f(x_0)+3=0$$

Θεωρούμε την $g(x)=xf'(x)-f(x)+3,\quad x\in[0,\pi]$

ή $\quad g(x)=x\,συνx-ημx+3,\quad x\in[0,\pi]$

Για την g στο $[0,\pi]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

- $$\left.\begin{aligned} g(0) &= 3 > 0 \\ g(\pi) &= -\pi + 3 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(\pi) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) + 3 = 0$$