Εξετάσεις 9 Ιουνίου 2017

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

(Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας-Πληροφορικής)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422

www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 135 (νέο βιβλίο) ή σελίδα 253 (παλιό βιβλίο)

Α2. α) Η πρόταση που διατυπώθηκε ήταν **Ψ (ψευδής)**

β) αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x & , \quad x\geq 0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$ διαπιστώνουμε ότι είναι

συνεχής στο σημείο $x_0=0$ αφού $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ αλλά δεν είναι

παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

(είναι τα γνωστά **γωνιακά** σημεία μιας συνάρτησης)

Α3. Θεωρία σελίδα 73 (νέο βιβλίο) ή σελίδα 191 (παλιό βιβλίο)

Α4.

α) Λ

(το όριο όπως διατυπώνεται είναι απροσδιοριστία άρα δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την τελική του τιμή)

β) Σ

(είναι θεωρία που διατυπώνεται με σαφήνεια όταν ορίζεται η σύνθεση συναρτήσεων)

γ) Λ

(η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι μια αναγκαία συνθήκη αλλά **όχι ικανή** για την ύπαρξη ακροτάτου)

δ) Σ

(είναι θεωρία που διατυπώνεται με σαφήνεια στα όρια)

ε) Σ

(είναι θεωρία που διατυπώνεται με σαφήνεια στα θεωρήματα συνέχειας)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της $(f \circ g)$

$$A_{(f\circ g)} = \left\{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\right\} = \left\{x \neq 1 \,/\, \frac{x}{1-x} > 0\right\}$$

Επιλύουμε την

Άρα $A_{(f\circ g)} = (0,1) \neq \varnothing$, ορίζεται η σύνθεση και έχει τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\frac{x}{1-x}$$

Β2.

Η συνάρτηση $h(x) = \ln\frac{x}{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{(x)' \cdot (1-x) - x \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x \cdot (1-x)} > 0$$ άρα η

συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0,1)$ άρα είναι 1-1 και συνεπώς είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Θα ορίσουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, το οποίο είναι το σύνολο τιμών της $h(x)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $h(\Delta) = A_{h^{-1}} = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} h(x), \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)\right)$

Υπολογίζουμε τα όρια:

- Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1-x} = 0$ και $\frac{x}{1-x} > 0$, αν θέσουμε $\omega = \frac{x}{1-x}$ θα έχουμε
  $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{\omega\to 0^+} \ln\omega = -\infty$
- Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x} = +\infty$ (αφού $1-x>0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0$) , αν θέσουμε $\omega = \frac{x}{1-x}$ θα έχουμε

  $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{\omega\to +\infty} \ln\omega = +\infty$

Συνεπώς καταλήξαμε ότι $h(\Delta) = A_{h^{-1}} = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} h(x), \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)\right) = \mathbb{R}$

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης έχουμε:

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^{y} \Leftrightarrow x=e^{y}-x\cdot e^{y} \Leftrightarrow x=\frac{e^{y}}{e^{y}+1}$$

Και έτσι έχουμε ότι $h^{-1}(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$, $x\in\mathbb{R}$

B3.

Η συνάρτηση $\Phi(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ είναι παραγωγίσιμη με

Η συνάρτηση $\Phi'(x)=\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\Phi''(x)=\frac{\left(e^{x}\right)'\cdot\left(e^{x}+1\right)^{2}-e^{x}\cdot\left(\left(e^{x}+1\right)^{2}\right)'}{\left(e^{x}+1\right)^{4}}=\frac{e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)^{2}-2e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)\cdot e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{4}}=\frac{e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)\left[1-e^{x}\right]}{\left(e^{x}+1\right)^{4}}$$

Το πρόσημο της Φ'' το καθορίζει η παράσταση $1-e^{x}$ και

$1-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow x<0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της δεύτερης παραγώγου

x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
$\Phi''(x)$	+	-
$\Phi(x)$		

Σ.Κ.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο διάστημα $(-\infty,0]$

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο διάστημα $[0,+\infty)$

Και έχει σημείο καμπής το σημείο $M(0,\Phi(0))$ δηλαδή το σημείο $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$ αφού

$$\Phi(0)=\frac{e^{0}}{e^{0}+1}=\frac{1}{2}$$

Β4.

- Αναζητούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0 \quad \text{αφού} \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

- Αναζητούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

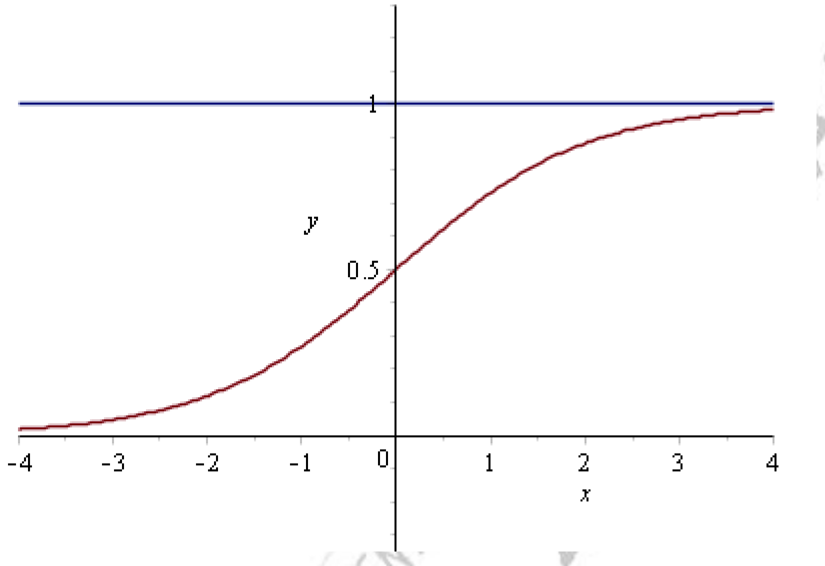
$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{\text{deL}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1 \quad \text{αφού} \quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Άρα η συνάρτηση έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ (άξονας $x'x$)

και έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (αφού $\Phi'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$)

Και η γραφική της παράσταση είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=-\eta\mu x \quad , \quad f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ την οποία την επαληθεύει το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ άρα έχουμε

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x_0+\eta\mu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Αναζητούμε λοιπόν τις ρίζες της συνάρτησης $\Phi(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\pi]$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$\Phi'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\eta\mu x$$

x	0 $\qquad \frac{\pi}{2}$	π
$\eta\mu x$	+	+
$x-\frac{\pi}{2}$	−	+
Γινόμενο	−	+

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Phi(0)=0$, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$, $\Phi(\pi)=0$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε $\Phi(x)<\Phi(0)=0$ και για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ έχουμε $\Phi(x)<\Phi(\pi)=0$

Άρα οι μοναδικές ρίζες της $\Phi(x)=0$ είναι $x_1=0$ και $x_2=\pi$

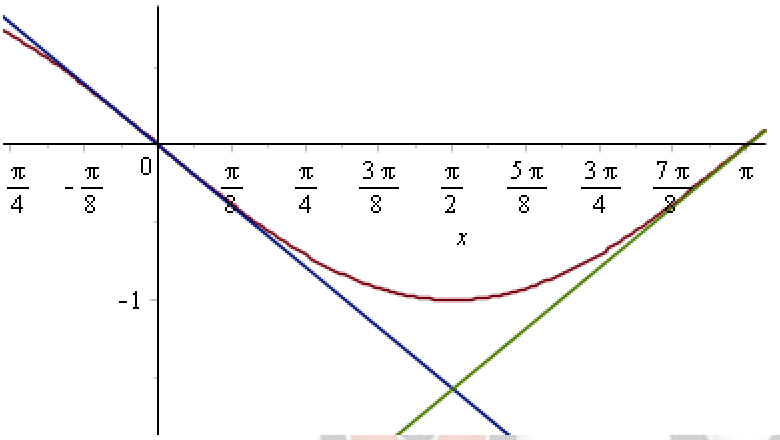
Δηλαδή υπάρχουν μόνο δύο εφαπτόμενες που άγονται από το σημείο Α.

Στο $x_1=0$ έχουμε την $(\varepsilon\varphi_1)$: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x$

Στο $x_2=\pi$ έχουμε την $(\varepsilon\varphi_2)$: $y-f(\pi)=f'(\pi)\cdot(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$

Γ2.

Θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα με την συνάρτηση και τις ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος



$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\,dx = \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi\cdot x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 2$$

Και έτσι $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} \qquad \left(= \frac{\pi}{0}\right)$$

Αναζητούμε το πρόσημο του παρονομαστή στην παράσταση του ορίου:

$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και σύμφωνα με την θεωρία θα είναι πάνω από την εφαπτομένη

Δηλαδή $f(x) \geq x - \pi$ και το ίσον ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή στο $x = \pi$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x) + x) = \pi > 0$ και $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x) - x + \pi) = 0$ αλλά $f(x) - x + \pi > 0$ στην περιοχή του π θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = +\infty$

Γ4.

Εφόσον $f(x) \geq x-\pi$ με το ίσον ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή στο $x=\pi$ για κάθε $x \in [1,e]$ θα ισχύει $f(x) > x-\pi \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} > 1-\dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{\pi}{x} > 0$

Άρα και

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}\right)dx > \int_1^e \left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}\right)dx > \left[x-\pi\cdot\ln x\right]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}\right)dx > e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$. Θα εξετάσουμε την συνέχεια της συνάρτησης στο $x_0=0$ με τον ορισμό.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x \cdot \eta\mu x = 0$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 και κατά συνέπεια είναι συνεχής και στο πεδίο ορισμού της το $[-1,\pi]$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζει η πρώτη παράγωγος ή δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος (όντας όμως συνεχής)

Εξετάζουμε με τον ορισμό αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = 1 \text{ αφού είναι γνωστό ότι } \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x<0$ πρέπει να θυμηθούμε ότι $\sqrt[3]{x^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = (-x)^{\frac{4}{3}}$ και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)} = \lim_{x\to 0^+} \left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\sqrt[3]{-x}\right) = 0$$

Άρα η συνάρτηση **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Όταν $x \in [-1,0)$, $f(x) = (-x)^{\frac{4}{3}}$ και $f'(x) = -\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0$

Όταν $x \in (0,\pi]$, $f(x) = e^x \cdot ημx$ και $f'(x) = e^x \cdot (ημx + συνx)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ημx + συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = -ημx \Leftrightarrow συνx = συν\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ και έχουμε

$$\begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2} + x \\ \quad ή \\ x = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$$ η πρώτη μορφή δεν αποδίδει λύσεις ενώ από την 2η μορφή έχουμε

$x = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = κ\pi - \frac{\pi}{4}$ και για $κ = 1$ προκύπτει η λύση $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{3\pi}{4}$

Δ2.

Θα μελετήσουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

Έχουμε δει ότι όταν $x \in [-1,0)$, $f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0$

Όταν $x \in (0,\pi]$, $f'(x) = e^x \cdot (ημx + συνx)$ η οποία έχει μία ρίζα την $\frac{3\pi}{4}$

- Η $f'(x)$ είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$

Όμως $\frac{\pi}{2} \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$ άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$

- Η $f'(x)$ είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Όμως $\pi \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ και $f'(\pi) = -e^{\pi} < 0$ άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Τώρα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
	Τ.Μ.		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$

Στο $x_1=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$

Στο $x_2=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Στο $x_3=\frac{3\pi}{4}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Στο $x_4=\pi$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi)=0$

Επειδή όμως η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα θα παρουσιάζει ολικά ακρότατα

Άρα η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή την τιμή 0 και μέγιστη τιμή την τιμή $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Δηλαδή το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ3.

$$E=\int_0^{\pi}\left|f(x)-e^{5x}\right|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot ημx-e^{5x}\right|dx=\int_0^{\pi}e^x\cdot\left|ημx-e^{4x}\right|dx$$

Θα πρέπει να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $ημx-e^{4x}$

Γνωρίζουμε ότι $e^{4x}\ge e^x\ge x+1>x\ge ημx \quad (x\ge 0)$

Άρα $E=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\cdot ημx\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}\,dx-\int_0^{\pi}e^x\cdot ημx\,dx$

Θα υπολογίσουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi}-1}{5}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{x}\cdot \eta\mu x\,dx \overset{\kappa.\pi.}{=} \left[e^{x}\cdot \eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\,dx = -\left[e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x}\cdot \eta\mu x\,dx =$$
$$-\left(-e^{\pi}-1\right)-I_2$$

Άρα $2I_2 = e^{\pi}+1 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Και έτσι $E = I_1 - I_2 = \dfrac{e^{5\pi}-1}{5} - \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4.

Την εξίσωση $16\cdot e^{\frac{-3\pi}{4}}\cdot f(x) - e^{\frac{-3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ θα προσπαθήσουμε να την συνδέσουμε με την συνάρτηση. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε με το $e^{\frac{3\pi}{4}}$ και έχουμε

$16\cdot f(x) - (4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ τώρα παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος μπορεί να γίνει η μέγιστη τιμή που υπολογίσαμε αρκεί να διαιρέσουμε με το 16. Έτσι έχουμε

$$f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{(4x-3\pi)^2}{16} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{(4x-3\pi)^2}{16}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x = \dfrac{3\pi}{4}$ και δεν έχει άλλη ρίζα αφού για κάθε $x \neq \dfrac{3\pi}{4}$ θα είναι $\dfrac{(4x-3\pi)^2}{16} > 0$ και επειδή $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης η ποσότητα $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \dfrac{(4x-3\pi)^2}{16} \notin f(A)$