Απαντήσεις Θεμάτων Ομογενών 05-09-2017

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος Fermat

Α2.

α) Ψευδής

β) Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$. Τότε, f: συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

Με $f'(x)=4x^3$.

Όπου f': συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

Με $f''(x)=12x^2$.

Παρατηρούμε ότι $f''(0)=0$, αλλά $f''(x)>0$, για κάθε $x\neq 0$. Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Α3. Η σωστή απάντηση είναι το (δ).

Α4.

(α) Σ

(β) Λ

(γ) Σ

(δ) Λ

(ε) Λ

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}, x\in\mathbb{R}$.

Β1.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα:

$$h'(x)=\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)'=\frac{e^x\left(1+e^{2x}\right)-e^x 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\frac{e^x+e^{3x}-2e^{3x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\frac{e^x-e^{3x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

Όμως $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα:

- $1+e^x>1>0$
- $\left(1+e^{2x}\right)^2>1>0$

Επομένως:

$h'(x)=0\Leftrightarrow 1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0$

$h'(x)<0\Leftrightarrow 1-e^x<0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$

Άρα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	+		-
h	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα:

$h:\nearrow$ στο $(-\infty,0)$, $h:\searrow$ στο $(0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ την τιμή $h(0)=\frac{1}{2}$.

B2.

- Για $x\in(-\infty,0]$ δείξαμε ότι $h:\nearrow$, άρα:

  $h((-\infty,0])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(0)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

  Επειδή: $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)=\frac{0}{1+0}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$.

- Για $x\in[0,+\infty)$ δείξαμε ότι $h:\searrow$, άρα:

  $h([0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(0)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

  Επειδή: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2e^{2x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2e^x}\right)=0$, αφού

  $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=0$.

Άρα $h(\mathbb{R})=\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

B3.

Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

Άρα, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B4.

Έχουμε:

$$\int_0^1 e^x\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_0^1\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1+e^{2x}\right)'}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+e^{2x}\right|\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+e^2\right|-\ln\left|1+e^0\right|\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+e^2\right)-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$$

Θέμα Γ

Γ1.

Το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο και επομένως από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$EZ^2 = BZ^2 + EB^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Επειδή $EZ > 0$, αφού είναι μήκος, και προφανώς πρέπει $0 \le x \le 2$ για να έχει νόημα το πρόβλημα.

Γ2.

Έστω $f(x)$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ, γνωρίζοντας ότι το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά α δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E} = \alpha^2$, έχουμε: $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}^{\,2} = 2x^2 - 4x + 4$, για $0 \le x \le 2$.

Γ3.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική.
Άρα: $f'(x) = 4x - 4$

Όμως:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Άρα

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'				-		+			
f				↘		↗			

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ την τιμή $f(1)=2$.

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και ορισμένη σε κλειστό διάστημα, θα ψάξουμε την μέγιστη τιμή στα άκρα του διαστήματος. Όμως: $f(0)=f(2)=4$.

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$ την τιμή $f(0)=f(2)=4$.

Άρα, το μέγιστο εμβαδό είναι ίσο με 4, και το ελάχιστο εμβαδό είναι ίσο με 2.

Γ4.

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι $f([0,2])=[2,4]$.

Έστω ότι υπάρχει $x_o \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=4e^{x_o}+1$, τότε:

$$4e^{x_o}+1 \in [2,4] \Leftrightarrow 2 \le 4e^{x_o}+1 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le 4e^{x_o} \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le e^{x_o} \le \frac{3}{4} \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) \le x_o \le \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Όμως $\frac{3}{4}<1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)<0$, άρα $\ln\left(\frac{1}{4}\right) \le x_o \le \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow x_o<0$.

ΑΤΟΠΟ, αφού από υπόθεση πρέπει $x_o \in [0,2]$.

Θέμα Δ

Δ1.

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι f: παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, άρα f: συνεχής στο $[0,3]$. Επίσης, η f δεν πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, επομένως πρέπει $f(0)=f(3) \Leftrightarrow f(3)=2$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι:

$$\int_0^3 |f'(x)|dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 -f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow [-f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -f(2)+f(0)+f(3)-f(2)=8 \Leftrightarrow -2f(2)+2+2=8 \Leftrightarrow -2f(2)=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(2)=-2$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{\ln x}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(x\cdot f'(x)\right) = 1\cdot f'(1) = 1\cdot(-3) = -3$$

Και

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{f(x)-2}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = -\infty,$$

επειδή $f'(x)<0$ για $x\in(0,2)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

Δ2.

Από την γραφική παράσταση της εκφώνησης γνωρίζουμε ότι:

- $f'(0)=0$
- $f'(2)=0$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<2$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2<x<3$

Άρα:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f'		-	+		
f		↘	↗		

Επίσης, $f(2)=-2$ και $f(0)=f(3)=2$, άρα είναι φανερό ότι η ελάχιστη τιμή είναι το -2 και η μέγιστη τιμή το 2.

Επίσης από την γραφική παράσταση έχουμε:

- f': ↘ στο $(0,1) \Leftrightarrow f''(x)<0 \Leftrightarrow f:\cap$ στο $(0,1)$.
- f': ↗ στο $(1,3) \Leftrightarrow f''(x)>0 \Leftrightarrow f:\cup$ στο $(1,3)$.

- Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, άρα από θεώρημα Fermat έχουμε $f''(1)=0$. Και επειδή το πρόσημο της f'' αλλάζει εκατέρωθεν της τιμής $x=1$, το σημείο $(1,f(1))$ είναι σημείο καμπής.

Άρα τελικά:

$f:\nearrow$ στο $(2,3)$, $f:\searrow$ στο $(0,2)$, $f:\cup$ στο $(1,3)$, $f:\cap$ στο $(0,1)$

f: παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=2$ την τιμή $f(2)=-2$

f: παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ ή $x=3$ την τιμή $f(0)=f(3)=2$

f: παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=1$

Δ3.

Γνωρίζουμε ότι $f([2,3])=[-2,2]$ και προφανώς $0\in[-2,2]$, άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Όμως η $f:\nearrow$ στο $(2,3)$, άρα είναι "1-1". Άρα το x_o είναι μοναδικό.

- Όμως, για $2<x<x_o$:
  Επειδή $f:\nearrow$ έχουμε
  $f(2)<f(x)<f(x_o)\Leftrightarrow -2<f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$
  Και επομένως
  $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
- Όμως, για $x_o<x<3$:
  Επειδή $f:\nearrow$ έχουμε
  $f(x_o)<f(x)<f(3)\Leftrightarrow 0<f(x)<2\Leftrightarrow f(x)>0$
  Και επομένως
  $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ για το οποίο το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Δ4.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω πληροφορίες έχουμε