ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία – Απόδειξη σελ.217(παλιό σχολ. βιβλίο) ή σελ 99 (νέο σχολ. βιβλίο)

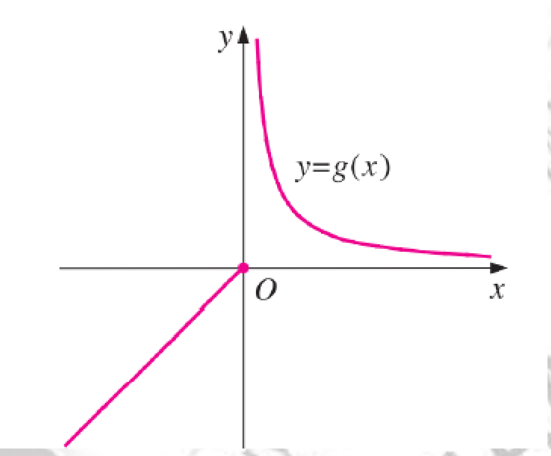
Α2. α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής (Ψ)

β) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ¨1-1¨ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει:

- Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με $f\left((0,+\infty)\right)=(0,+\infty)$.
- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα με $f\left((-\infty,0]\right)=(-\infty,0]$.

Δηλαδή η f είναι ¨1-1¨, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Α3. Θεωρία σελ.192 (παλιο σχολ. βιβλίο) ή σελ 74 (νέο σχολ. βιβλίο).

Α4. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως θα είναι συνεχής και στο $x_o=3$. Άρα:
$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$.

Όμως:

- $f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2ax+6)=6a+6$ και
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+(3-a)x+3a\right)=-9+9-3a+3a=0$

Άρα: $6a+6=0\Leftrightarrow a=-1$.

Β2. Για $a=-1$ η f γίνεται: $f(x)=\begin{cases} -2x+6, & x\le 3 \\ -x^2+4x-3, & x>3 \end{cases}$.

- Για $x<3$: $f(x)=-2x+6$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
- Για $x>3$: $f(x)=-x^2+4x-3$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
- Για $x_o=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+6-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2(x-3)}{x-3}=-2\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2+4x-3-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}=-2\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή έχουμε: $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-2\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=3$, με $f'(3)=-2$.

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β3. Στο διάστημα $(3,+\infty)$ έχουμε: $f(x)=-x^2+4x-3$ με $f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$.

Τότε έχουμε:

$x>3\Leftrightarrow x-2>1\Leftrightarrow -2(x-2)<-2<0\Leftrightarrow f'(x)<0$.

Άρα, η $f:\searrow$ στο $(3,+\infty)$. Όμως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα, η $f:\searrow$ στο $[3,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1-4\left(x^{-2}\right)'=1+8x^{-3}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)>0\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		-		-	0	+	
x^3+8		-	0	+		+	
$\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o$		+		-	‖	+	

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$		↗	0	↘	‖	↗	
			Τ.Μ.				

Η f παρουσιάζει στο $x_o = -2$ τοπικό μέγιστο, το $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$.

Γ2. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$ και πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

• Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty \text{ , επειδή } \lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^2} = +\infty$$

και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$, επειδή $\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^2} = +\infty$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Για να είναι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) αρκεί τα όρια $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί (αντίστοιχα $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0, \text{ οπότε } \beta = 0$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = 0, \text{ οπότε } \beta = 0$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f δίνεται από την σχέση:

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$, όπου $f'(2) = 2$. Άρα $y-1 = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x-3$.

Γ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-1} = \lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-\frac{4}{x^2}-1} = \lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{x^3-x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{x^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x^2}{x^2+x+2} = \frac{4}{4+2+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $l = 8m$, τετράγωνο περιμέτρου x και κύκλος περιμέτρου $8-x$. Τότε ισχύει:

- Πλευρά τετραγώνου: $a = \frac{x}{4}$
- Ακτίνα κύκλου: $\rho = \frac{8-x}{2\pi}$ (αφού $L = 2\pi\rho = 8-x$), όπου $0 < x < 8$

Δ1. Έστω $E_1 = E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$ και $E_2 = E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}$, τότε το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από την σχέση: $E = E_1 + E_2$, όπου:

- $\mathrm{E}_1 = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$
- $E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\dfrac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{64-16x+x^2}{4\pi}$

Άρα: $\mathrm{E}(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{64-16x+x^2}{4\pi} = \dfrac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi} = \dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, για $x \in (0,8)$.

Δ2. Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη πολυωνυμική συνάρτηση, με:

$$\mathrm{E}'(x) = \frac{2(\pi+4)x-32}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$$

Άρα:

- $\mathrm{E}'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{32}{\pi+4}$
- $\mathrm{E}'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi} > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{32}{\pi+4}$
- $\mathrm{E}'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi} < 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{32}{\pi+4}$

Επομένως, προκύπτει:

x	$-\infty$ 0	$\dfrac{32}{\pi+4}$	8	$+\infty$
E'		−	+	
E		↘	↗	

Ο.Ε.

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_o = \dfrac{32}{\pi+4}$, την τιμή

$\mathrm{E}\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \ldots = \dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)}$.

Επίσης, για $x_o = \dfrac{32}{\pi+4}$, παρατηρούμε ότι:

- Πλευρά τετραγώνου: $a = \dfrac{x_o}{4} = \dfrac{8}{\pi+4}$

- Διάμετρος κύκλου: $\delta = 2\rho = 2\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$

Άρα, πράγματι το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνει ίση με την διάμετρο του κύκλου.

Δ3. Αρχικά θα υπολογίσουμε τα όρια στα άκρα του διαστήματος $(0,8)$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{0-0+256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$
- $\lim\limits_{x\to 8^-} \mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{64(\pi+4)-512+256}{16\pi} = 4$

Άρα, για $x \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$, επειδή η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα ισχύει:

$\mathrm{E}\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[\dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)}, \dfrac{16}{\pi}\right)$. Όμως:

- $\dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)} < 5 \Leftrightarrow 16(\pi+4) - 64 < 5\pi(\pi+4) \Leftrightarrow 5\pi^2 + 4\pi > 0$, ισχύει.
- $5 < \dfrac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi < 16$, ισχύει (αφού $3{,}1 < \pi < 3{,}2 \Leftrightarrow 15{,}5 < 5\pi < 16$)

Άρα, $5 \in \mathrm{E}\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}(x_1) = 5$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα, άρα x_1 μοναδική ρίζα.

Ομοίως, για $x \in \left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$, επειδή η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα ισχύει:

$\mathrm{E}\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[\dfrac{16}{\pi} - \dfrac{64}{\pi(\pi+4)}, 4\right)$. Όμως: $4 < 5$, άρα $5 \notin \mathrm{E}\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)\right)$, άρα η $\mathrm{E}(x) = 5$ είναι αδύνατη στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Τελικά, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right) \subseteq (0,8)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}(x_1) = 5$.