ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΕΜΠΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σελ.144 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός, σελ. 185 σχολικού βιβλίου

Α3. Θεώρημα σελ. 128 σχολικού βιβλίου, γεωμετρική ερμηνεία σελ. 129 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Σ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2+1$ και

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sqrt{x-2}$

Β1. Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε:

$$A_{g\circ f}=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\geq 2\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2+1\geq 2\}=$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2\geq 1\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq 1 \text{ ή } x\leq -1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

Άρα, για τον τύπο της $g\circ f$ έχουμε:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-2}=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$$

Β2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$, όπου:

- Για $x>2 \Rightarrow x-2>0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{h(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}>0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.
- Για $x<2 \Rightarrow x-2<0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{h(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}>0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Άρα, το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)}{x-2}$ δεν υπάρχει.

Β3. Έχουμε $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$, άρα $(g\circ f)(\sqrt{2})=\sqrt{\sqrt{2}^2-1}=1$ και

$(g\circ f)'(x)=\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, άρα

$(g\circ f)'(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}^2-1}}=\sqrt{2}$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη $x=\sqrt{2}$ δίνεται από τη σχέση:

$$y-(g\circ f)(\sqrt{2})=(g\circ f)'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \Leftrightarrow y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Leftrightarrow y=\sqrt{2}x-1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε

$$f'(x)f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=(x)' \Rightarrow f^2(x)=x+c, c\in\mathbb{R}$$

Όμως, για $x=1$ γνωρίζουμε ότι $f(1)=1$, επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται $f^2(1)=1+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$. Δηλαδή, $f^2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\pm\sqrt{x}$.

(Σε αυτό το σημείο πρέπει να απορρίψουμε μία από τις δύο περιπτώσεις, αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.)

Α ΤΡΟΠΟΣ

Έστω ότι $f(x)=-\sqrt{x}$, τότε για $x=1$ έχουμε $f(1)=-\sqrt{1}=-1\neq 1$ ΑΤΟΠΟ, επομένως $f(x)=\sqrt{x}$.

Β ΤΡΟΠΟΣ

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και μάλιστα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δηλαδή η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $f(1)=1>0$, άρα θα είναι και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δηλαδή $f(x)=\sqrt{x}$.

Γ2. Η απόσταση των σημείων $M(x,f(x))$ και $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ δίνεται από τη σχέση:

$$d(A,\mathrm{M})=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(f(x)-0\right)^2}=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+\sqrt{x}^2}=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$$ για

κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα αν ορίσουμε την συνάρτηση $d(x)=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$,

έχουμε: $d'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}\right)'=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}$

Επομένως,

- $d'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}=0\Leftrightarrow x=1$
- $d'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}>0\Leftrightarrow x>1$
- $d'(x)<0\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}<0\Leftrightarrow x<1$

Άρα, έχουμε:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$d'(x)$			$-$	$+$
$d(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Τελικά, είναι φανερό ότι η συνάρτηση της απόστασης δέχεται μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x=1$, επομένως το σημείο $M(1,1)$ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το Α την ελάχιστη απόσταση.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι ίσο με -1. Όντως έχουμε:

- Για την ευθεία ΑΜ ισχύει: $\lambda_{AM} = \dfrac{1-0}{1-\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -2$

- Για την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x=1$ ισχύει

  $\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

Άρα, $\lambda_{\text{AM}} \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi} = -2 \cdot \dfrac{1}{2} = -1$ οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Γ4. Για το εμβαδό ισχύει:

$$\text{E} = \int_1^2 \left| f(x) \right| dx = \int_1^2 \left| \sqrt{x} \right| dx \overset{\sqrt{x} \geq 0}{=} \int_1^2 \sqrt{x} dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{8}}{3} - \frac{2}{3} \text{ τετ. μον.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή, με $f'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} \right)' =$

$$= \frac{3x^2 \left(3x^2 - 3x + 1\right) - x^3 \left(6x - 3\right)}{\left(3x^2 - 3x + 1\right)^2} = \frac{9x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 6x^4 + 3x^3}{\left(3x^2 - 3x + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{\left(3x^2 - 3x + 1\right)^2} = \frac{3x^2 \left(x^2 - 2x + 1\right)}{\left(3x^2 - 3x + 1\right)^2} = \frac{3x^2 \left(x - 1\right)^2}{\left(3x^2 - 3x + 1\right)^2} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επομένως, θα πρέπει να ψάξουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Για το $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \text{ και}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3} x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 3x^3 + 3x^2 - x}{3\left(3x^2 - 3x + 1\right)} =$$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x}{9x^2 - 9x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{9x^2} = \dfrac{1}{3}$, άρα η ευθεία $y = \dfrac{1}{3} x + \dfrac{1}{3}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- Ομοίως για το $-\infty$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{3}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{3}x\right)=\dfrac{1}{3}$, άρα η ευθεία $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

Δ3. Έχουμε:

$$f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2-3(1-x)+1}=$$

$$=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3-6x+3x^2-3+3x+1}=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}=$$

$$=\frac{x^3+1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}=\frac{1-3x+3x^2}{3x^2-3x+1}=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ4. Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}=0\Leftrightarrow x=0$, επομένως το εμβαδό που ψάχνουμε δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E}=\int_0^1\left|f(x)\right|dx$. Όμως, $3x^2-3x+1>0$ επειδή $\Delta=9-12=-3<0$ και $x^3\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f(x)\geq 0$ στο $[0,1]$. Επομένως:

$$\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

(Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε δύο τρόπους)

Α ΤΡΟΠΟΣ – Με χρήση του ερωτήματος Δ3

$$\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)\,dx=\left\{\begin{array}{c}\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x=1-w\\ dx=-dw\\ x=1\Rightarrow w=0\\ x=0\Rightarrow w=1\end{array}\right\}=-\int_1^0 f(1-w)\,dw=\int_0^1 f(1-w)\,dw=$$

$$=\left\{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ w=x\right\}=\int_0^1 f(1-x)\,dx$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)\,dx\\ \kappa\alpha\iota\\ \mathrm{E}=\int_0^1 f(1-x)\,dx\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}2\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(1-x)\,dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)+f(1-x)\,dx\Leftrightarrow 2\mathrm{E}=\int_0^1 1dx\Leftrightarrow 2\mathrm{E}=[x]_0^1\Leftrightarrow 2\mathrm{E}=1\Leftrightarrow \mathrm{E}=\frac{1}{2}$$ τετ. μον.

Β ΤΡΟΠΟΣ – Με διαίρεση

$$\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^3}{3x^2-3x+1}\,dx$$

Όμως, έχουμε:

$$\begin{array}{llll|l}
+x^3 & & & & 3x^2-3x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & -\frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ \cline{1-4}
 & +x^2 & -\frac{1}{3}x & & \\
 & -x^2 & +x & -\frac{1}{3} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2}{3}x & -\frac{1}{3} &
\end{array}$$

Άρα $\mathrm{E}=\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)\left(3x^2-3x+1\right)+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{3x^2-3x+1}\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{1}{3}}\,dx=$

$$=\left[\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\cdot\ln\left|x^2-x+\frac{1}{3}\right|\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot\ln\frac{1}{3}-0-0-\frac{1}{9}\cdot\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ \text{τετ. μον.}$$