# Εξετάσεις 10 Ιουνίου 2019

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου

## Εσπερινό Γενικό Λύκειο

## *ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ*

σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**ΤΣΙΜΙΣΚΗ &ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ**ΤΗΛ: 270727–222594
**ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ**ΤΗΛ: 919113–949422
**www.syghrono.gr**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** α) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 15

β) i) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 35;

ii) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 35-36

**Α2.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 142

**Α3.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 135

**Α4.** α) Λάθος, σχόλιο Σχολικού βιβλίου – σελ. 134

β) Λάθος, παράδειγμα Σχολικού βιβλίου – σελ. 171

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε $\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2}{x_2-1} \Rightarrow \cancel{x_1x_2}-x_1=\cancel{x_1x_2}-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η συνάρτηση είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της και επομένως αντιστρέφεται. Για την εύρεση της αντίστροφης θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε:

$$y=f(x) \Rightarrow y=\frac{x}{x-1} \Rightarrow y(x-1)=x \Rightarrow yx-y=x \Rightarrow yx-x=y \Rightarrow x(y-1)=y$$
$$\overset{y\neq 1}{\Rightarrow} x=\frac{y}{y-1}$$

Άρα η αντίστροφη έχει τύπο $f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}, x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

**Β2.** Η εφαπτομένη της συνάρτησης $f$ στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι η ευθεία $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

$f(2)=2$ και $f'(2)=-1$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι η $y=-x+4$.

**Β3.**Αφού $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ τότε έχουμε ότι:

Η $f:\searrow$ στο $(-\infty,1)$ και $f:\searrow$ στο $(1,+\infty)$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε

$$\begin{cases} x\in A_f=\mathbb{R} \\ f(\mathrm{x})\in \mathrm{A}_g=[2,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ f(\mathrm{x})\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2+1\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ |x|\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \end{cases}$$

και $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{f(x)-2}=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$

Άρα, $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$ με $A_{g\circ f}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

**Γ2.** Η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης στο άπειρο, αν υπάρχει, είναι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$

με $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=1$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(\mathrm{x})-\lambda\,\mathrm{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}\overset{-1/\infty}{=}0$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο άπειρο είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ δηλαδή η διχοτόμος του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου.

**Γ3.**

$$\lim_{x\to2}\frac{h(\mathrm{x})-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}^2-\sqrt{3}^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Η συνάρτηση είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=1$.

Λόγω συνέχειας της $f$ στο 1, έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}f(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to1^+}f(\mathrm{x})=f(1)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to1^-}\left(-(x-1)^4+\beta x\right)=\lim_{x\to1^+}\left(x^2+a\right)\Rightarrow\beta=1+\alpha$$

Λόγω της παραγωγισιμότητας της $f$ στο 1, έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(\mathrm{x})-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(\mathrm{x})-f(1)}{x-1}=f'(1)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)^4+\beta x-\beta}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-\alpha-1}{x-1}\Rightarrow\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)^4}{x-1}+\lim_{x\to1^-}\frac{\beta x-\beta}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^-}-(x-1)^3+\lim_{x\to1^-}\frac{\beta(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\Rightarrow 0+\beta=2$$

Άρα, $\beta=2$ και $\alpha=1$.

**Δ2.** Για $\alpha=1$, $\beta=2$ έχουμε $f(\mathrm{x})=\begin{cases} x^2+1 & ,x\geq1 \\ -(x-1)^4+2x & ,x<1\end{cases}$

Για $x\geq1$ έχουμε $f'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x>0$ Άρα, $f:\nearrow$ στο $[1,+\infty)$

Για $x<1$ έχουμε $f'(x)=\left(-(x-1)^4+2x\right)'=-4(x-1)^3+2>0$ διότι έχουμε

$$x<1\Rightarrow x-1<0\Rightarrow(x-1)^3<0\Rightarrow-(x-1)^3>0\Rightarrow-(x-1)^3+2>2>0$$

Άρα, $f:\nearrow$ στο $(-\infty,1)$ . Επίσης, η $f$ είναι συνεχής στο $x=1$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ .

**Δ3.** Η συνάρτηση $f$ πληροί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0)=1$, $f(1)=-2$ και $f(0)f(1)=-2<0$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\mathrm{x}_0)=0$ . Όμως η συνάρτηση είναι γνησίως άυξουσα, άρα και 1-1, επομένως η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Τελικά, η εξίσωση $f(\mathrm{x})=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα $x_0\in(0,1)$.

**Δ4.** Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f^2(\mathrm{x})+\mathrm{x}_0 f(\mathrm{x})=0$ έχει ρίζα $\xi\in(x_0,+\infty)$. Τότε θα ισχύει ότι

$$f^2(\xi)+\mathrm{x}_0 f(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)\left(f(\xi)+\mathrm{x}_0\right)=0\Rightarrow f(\xi)=0 \;\text{ ή }\; f(\xi)+\mathrm{x}_0=0$$

Η εξίσωση $f(\xi)=0$ είναι αδύνατη διότι η $f$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=x_0$ .

Επίσης, ισχύει ότι $x_0<\xi\overset{f:\nearrow}{\Rightarrow}f(\mathrm{x}_0)<f(\xi)\Rightarrow0<f(\xi)$ και $x_0>0\Rightarrow-x_0<0$

Άρα, ισχύει ότι $-x_0<0<f(\xi)$ δηλαδή, $-x_0\neq f(\xi)\Rightarrow f(\xi)+x_0\neq0$

Επομένως, η εξίσωση $f^2(\mathrm{x})+\mathrm{x}_0 f(\mathrm{x})=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Επιμέλεια:

Ζαχαράκης Στέφανος

Μαργαριτέλη Ελένη

Παπαπλιούρας Νίκος