Εξετάσεις 10 Ιουνίου 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΓΕΛ Γ' Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 15

β) i) Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 35

ii) Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 35-36

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 142

Α3. Απόδειξη σχολικό βιβλίο – σελ. 135

Α4. α) Λάθος, σχόλιο σχολικού βιβλίου – σελ. 134

β) Λάθος, παράδειγμα σχολικού βιβλίου – σελ. 71

Α5. γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$. Άρα, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}+\lambda-2\right]=0 \Leftrightarrow 0+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$. Δηλαδή, έχουμε $f(x)=e^{-x}+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x,\ x\in\mathbb{R}$.

- g: συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $$\left.\begin{array}{l} g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0 \\ g(3)=e^{-3}+2-3=\dfrac{1-e^{3}}{e^{3}}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0$$

Επομένως, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0$.

Επίσης, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου $g'(x)=-e^{-x}-1<0$, άρα $g:\searrow$ στο $\mathbb{R}$, επομένως $g:1-1$ στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0 \Leftrightarrow f(x_o)-x_o=0$.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=-e^{-x}<0 \Rightarrow f:\searrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow f:1-1$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$:αντιστρέψιμη. Επίσης,

$f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$, με $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$.

Άρα, $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ για κάθε $x>2$.

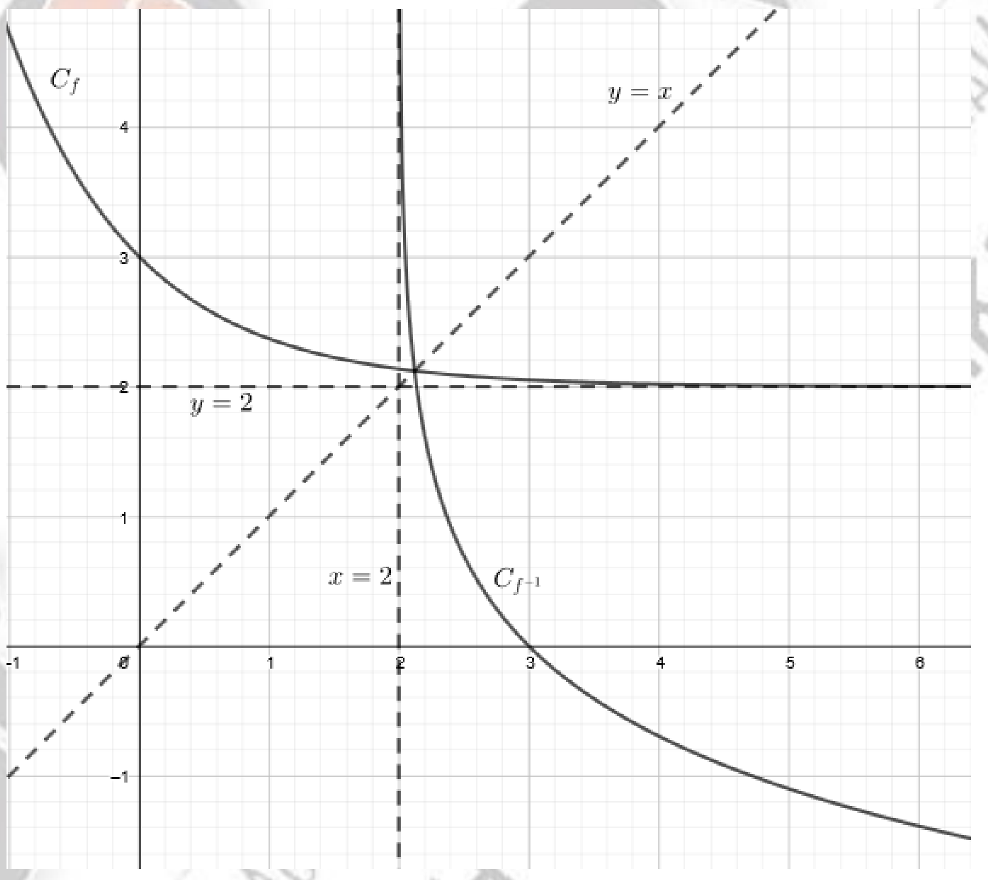
Β4. Θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 2. Άρα,

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \overset{x-2=\omega}{\underset{\omega\to 0^+}{=}} \lim_{\omega\to 0^+}\left(-\ln(\omega)\right) = -(-\infty) = +\infty .$$

Επομένως, η ευθεία $x=2$ αποτελεί κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Για την συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+2$, γνωρίζουμε ότι αποτελεί μία κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης "e^{-x}", 2 μονάδων προς τα πάνω.
- Για την συνάρτηση $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, γνωρίζουμε ότι αποτελεί μία οριζόντια μετατόπιση της "$-\ln x$", 2 μονάδων προς τα δεξιά.

Άρα, προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση.



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$.

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας της f στο $x=1$, έχουμε:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Όμως, $f(1)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha$ και $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$.

Επομένως, ισχύει ότι $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Επίσης, λόγω παραγωγισιμότητας στο 1, έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Όπου:

- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-\beta-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}+\beta\cdot\dfrac{x-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta\right)=1+\beta$

  Επειδή, $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{e^{x-1}}{1}\right)=1$.

- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2+a-1-a}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$

Άρα, πρέπει $1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$. Όμως, $\alpha=\beta$. Άρα, έχουμε $\alpha=\beta=1$.

Επομένως, $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$.

Γ2. Για $x>1$ έχουμε $f'(x)=2x>0 \Rightarrow f:\nearrow$ στο $(1,+\infty)$.

Για $x<1$ έχουμε $f'(x)=e^{x-1}+1>0\Rightarrow f:\nearrow$ στο $(-\infty,1)$.

Επίσης, η f είναι συνεχής στο 1, επομένως $f:\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f(\mathbb{R})\overset{f:\nearrow}{\underset{f:\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Επειδή:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=0-\infty=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty+1=+\infty$

Γ3. i) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, με $f(-1)\cdot f(0)=\left(e^{-1}-1\right)\cdot\left(e^{-1}\right)=\dfrac{1-e}{e^2}<0$. Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f στο διάστημα $(-1,0)$. Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα η οποία είναι αρνητική. Όμως, έχουμε αποδείξει ήδη ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Επομένως, η f έχει μοναδική ρίζα η οποία είναι αρνητική.

ii) Έχουμε $f^2(x)-x_o f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\big(f(x)-x_o\big)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=x_o$

Όμως, αποδείξαμε στο ερώτημα Γ3 (i) ότι η μοναδική ρίζα της f είναι η $x=x_o$, επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$. Επίσης, για $x>x_o \overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_o) \Leftrightarrow f(x)>0$ και έχουμε αποδείξει ότι $x_o<0$, δηλαδή $f(x)>0>x_o$, άρα η $f(x)=x_o$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$. Άρα, η $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

Γ4. Θεωρώντας τα σημεία $\mathrm{M}(x,y)$, $O(0,0)$ και $\mathrm{K}(x,0)$ με $y=f(x)$, έχουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΜΟΚ δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E}=\frac{\mathrm{OK}\cdot\mathrm{KM}}{2}=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\cdot f(x)}{2}=\frac{x^3+x}{2}$, επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές τις ΟΚ και ΚΜ. Επομένως, για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει $\mathrm{E}(t)=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$, άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{E}'(t)=\frac{3\cdot x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2}$. Όμως, για την χρονική στιγμή t_o γνωρίζουμε ότι $x(t_o)=3\mu o\nu.$ και $x'(t_o)=2\,{}^{\mu o\nu}/_{\delta\varepsilon\upsilon\tau.}$. Άρα, $\mathrm{E}'(t_o)=\frac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=28\,{}^{\tau\varepsilon\tau\rho.\mu o\nu.}/_{\delta\varepsilon\upsilon\tau.}$.

ΘΕΜΑ Δ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, και $(\varepsilon): y=-x+2$ η εφαπτόμενη στο σημείο $\mathrm{A}(1,1)\in C_f$.

Δ1. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,1)$ δίνεται από τη σχέση
$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$. Άρα, πρέπει:

- $f'(1)=-1$ και
- $-f'(1)+f(1)=2$

Όμως, $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$. Άρα, $f'(1)=-1 \Leftrightarrow \ln 1+0+\alpha=-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha=-1$. Επίσης, $-f'(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow 1+0+\alpha+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2$.

Άρα, $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ και $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2x^2-4x+2}{x^2-2x+2}-1=$
$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$.

Δ2. Έχουμε: $E(\Omega)=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2\right|dx=$

$=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx$, όπου:

- για κάθε $x\in[1,2]\Rightarrow x\ge 1\Leftrightarrow x-1\ge 0$ και
- για κάθε

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1\overset{\ln x:\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln\left[(x-1)^2+1\right]\ge\ln 1\Leftrightarrow\ln\left(x^2-2x+2\right)\ge 0$$

Άρα, $E(\Omega)=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx\overset{\text{Κ.Π.}}{=}$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=$$

$$=(2-2)\ln 2-\left(\frac{1}{2}-1\right)\ln 1-\int_1^2\frac{x^2-2x}{2}\cdot\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}dx=-\int_1^2\frac{\left(x^2-2x\right)(x-1)}{x^2-2x+2}dx=$$

$$=-\int_1^2\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x+2}dx$$

Όμως:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -3x^2 & \cancel{2x} & & x^2-2x+2 \\
\cancel{-x^3} & +2x^2 & \cancel{-2x} & & \hline x-1 \\
\hline
 & \cancel{-x^2} & & & \\
 & \cancel{+x^2} & -2x & +2 & \\
\hline
 & & -2x & +2 &
\end{array}$$

Άρα, $x^3-3x^2+2x=\left(x^2-2x+2\right)(x-1)-2x+2$. Επομένως,

$$E(\Omega)=-\int_1^2\frac{\left(x^2-2x+2\right)(x-1)-2x+2}{x^2-2x+2}dx=-\int_1^2 x-1-\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-x-\ln\left|x^2-2x+2\right|\right]_1^2=-\left(2-2-\ln 2-\frac{1}{2}+1+\ln 1\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\text{ τετρ. μον.}$$

Δ3. i) Έχουμε: $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$. Στο ερώτημα (Δ2), έχουμε αποδείξει ήδη ότι $\ln\left(x^2-2x+2\right)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(σχέση 1)**. Έστω, παραγωγίσιμη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$ στο $\mathbb{R}$. Τότε:

$$h'(x)=\left(\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}\right)'=\frac{(2x-2)\left(x^2-2x+2\right)-\left(x^2-2x\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$=\dfrac{\cancel{2x^3}-\cancel{4x^2}+4x-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-4-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+\cancel{4x^2}-\cancel{4x}}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\dfrac{4(x-1)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$. Άρα, έχουμε:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$
- $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$

Δηλαδή, προκύπτει ο πίνακας:

x	$-\infty$	1 $\quad$ $+\infty$
h'	$-$	$+$
h	$\searrow$	$\nearrow$

ΟΛ. ΕΛΑΧ.

$$h(1)=-1$$

Άρα, η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, δηλαδή, $h(x)\geq h(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(σχέση 2)**. Άρα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0\\ \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}\geq -1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}\geq -1\Leftrightarrow f'(x)\geq -1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε: $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1\Leftrightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1 \textbf{(σχέση 3)}$$

Όμως, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$. Άρα, από Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$. Άρα, η σχέση (3) γίνεται $f'(x_o)\geq -1$, που ισχύει από το ερώτημα Δ3 (i).

Δ4. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε, η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη το x_1 και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη το x_2 να ταυτίζονται. Άρα, πρέπει

$-x_1 f'(x_1)+f(x_1)=-x_2 g'(x_2)+g(x_2)$ και $f'(x_1)=g'(x_2)$. Όμως, έχουμε αποδείξει στο ερώτημα Δ3 (i) ότι $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης, έχουμε $g'(x)=-3x^2-1$, όπου για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $-3x^2\leq 0 \Leftrightarrow -3x^2-1\leq -1 \Leftrightarrow g'(x)\leq -1$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x)\geq -1\geq g'(x)$. Άρα, για να ισχύει η ισότητα $f'(x_1)=g'(x_2)$, πρέπει αναγκαστικά να ισχύουν:

- $f'(x_1)=-1 \Leftrightarrow x_1=1$, από ερώτημα Δ1, και
- $g'(x_2)=-1 \Leftrightarrow -3x_2^2-1=-1 \Leftrightarrow x_2=0$

Όπου, η εφαπτόμενη ευθεία της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_2=0$ δίνεται από τη σχέση $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-2=-x \Leftrightarrow y=-x+2$, η οποία γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι είναι και εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_1=1$.

Επιμέλεια:

Ζαχαράκης Στέφανος

Μαργαριτέλη Ελένη

Παπαπλιούρας Νίκος