Εξετάσεις 8 Ιουνίου 2019

Άλγεβρα ΕΠΑΛ Γ' Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ.28

Α2. α) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 59

β) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο – σελ. 59

Α3. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $s^2 = 4 \Leftrightarrow s = \sqrt{4} = 2$. Επίσης, $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow 20\% = \frac{2}{|\bar{x}|} \cdot 100\% \Leftrightarrow |\bar{x}| = 10$. Όμως, οι παρατηρήσεις είναι όλες θετικές, άρα και η μέση τιμή θα είναι θετική. Επομένως, $\bar{x} = 10$.

Β2. Γνωρίζουμε ότι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} t_i}{6} \Leftrightarrow 10 = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} \Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$.

Β3. Για να βρούμε τη διάμεσο, πρέπει να διατάξουμε τις αριθμητικές παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Δηλαδή, $7,8,10,11,11,13$. Επειδή, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή: $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$. Επίσης, το εύρος δίνεται από την αφαίρεση της μικρότερης τιμής από την μεγαλύτερη, δηλαδή: $R = x_{\max} - x_{\min} = 13 - 7 = 6$.

Β4. Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, γνωρίζουμε ότι αν όλες οι παρατηρήσεις μειωθούν κατά 2 μονάδες, τότε για την νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση έχουμε:

- $\bar{x}' = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8$
- $s' = s = 2$

Άρα, έχουμε: $CV' = \frac{s'}{|\bar{x}'|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,10$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot \left(x^2 - 2x + 10\right)' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} =$

$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$.

Γ2. Έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Επομένως, προκύπτει:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Ολ. Ελαχ.

Άρα, έχουμε:

- $f:\searrow$ στο $(-\infty,1]$ και
- $f:\nearrow$ στο $[1,+\infty)$

Επίσης, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_o=1$, την τιμή $f(1)=\sqrt{1-2+10}=3$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Γ3. Έστω η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(5,f(5))$. Τότε, πρέπει $\lambda=f'(5)=\dfrac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}}=\dfrac{4}{5}$. Άρα, η ευθεία γίνεται $y=\dfrac{4}{5}x+\beta$, όμως το σημείο $\mathrm{M}(5,f(5))=\mathrm{M}(5,5)$ ανήκει στην ευθεία, επομένως για $x=5$ και $y=5$ έχουμε: $5=\dfrac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow \beta+4=5 \Leftrightarrow \beta=1$. Άρα, η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(5,f(5))$ είναι η $y=\dfrac{4}{5}x+1$.

Γ4. Το σημείο τομή της ευθείας (ε) με το άξονα x'x είναι το $\mathrm{A}(x,0)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $0=\dfrac{4}{5}x+1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{5}x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$. Άρα, το σημείο Α έχει συντεταγμένες $\mathrm{A}\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$.

Το σημείο τομή της ευθείας (ε) με το άξονα y'y είναι το $\mathrm{B}(0,y)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1$. Άρα, το σημείο Β έχει συντεταγμένες $\mathrm{B}(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Δ1. Για $\lambda=3$ έχουμε: $f(x)=x^3-3x^2+3x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, όπου: $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2\geq 0$. Επομένως, $f:\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, ισχύει $\frac{3}{8}<\frac{5}{6}\overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. Για $\lambda=3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-1)x}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x-1)x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{3(1+1)}{1}=3\cdot2=6$$

Δ3. Πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τιμή της f'. Άρα, έχουμε $f''(x)=6x-6$, όπου:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow 6x=6\Leftrightarrow x=1$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow 6x-6>0\Leftrightarrow 6x>6\Leftrightarrow x>1$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow 6x-6<0\Leftrightarrow 6x<6\Leftrightarrow x<1$

Επομένως, προκύπτει:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$
		Ολ. Ελαχ.	

$$f'(1)=0$$

Άρα, το σημείο της γραφικής παράστασης που η εφαπτόμενη ευθεία παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή, είναι το σημείο με τετμημένη $x_o=1$, δηλαδή το σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))=\mathrm{A}(1,1)$.

Δ4. Για να μην παρουσιάζει ακρότατο η συνάρτηση f, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος να διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Όμως, $f'(x)=3x^2-6x+\lambda$. Άρα, πρέπει για την διακρίνουσα να ισχύει:

$$\Delta \le 0 \Leftrightarrow 6^2-4\cdot 3\cdot \lambda \le 0 \Leftrightarrow 36-12\lambda \le 0 \Leftrightarrow 12\lambda \ge 36 \Leftrightarrow \lambda \ge 3$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda=3$.

Επιμέλεια:

Ζαχαράκης Στέφανος

Μαργαριτέλη Ελένη

Παπαπλιούρας Νίκος