σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα ήταν απαιτητικά και εξέταζαν μεγάλο μέρος της ύλης.

Το **θέμα Β** απαιτούσε την γνώση βασικών μεθοδολογιών και των βασικών συναρτήσεων.

Τα ερωτήματα του **θέματος Γ** είχαν πιο γεωμετρικό προσανατολισμό με ασκήσεις στην εφαπτομένη και στο τελείωμα ένα πρόβλημα ρυθμού μεταβολής, το οποίο γενικά δυσκολεύει τους μαθητές.

Στο **θέμα Δ** υπήρχαν ζητήματα λίγο πιο τεχνικά, με αρκετές πράξεις σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η μεγαλύτερη δυσκολία αναμένεται στο **ερώτημα Δ2** στην απόδειξη του προσήμου της πρώτης παραγώγου, καθώς και στο **ερώτημα Δ4** που απαιτεί την απόδειξη ανίσωσης μέσω ΘΜΤ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σελ.111 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός, σελ.140 σχολικού βιβλίου – Λογικά θα δεχτούν και τον ορισμό στην σελ.32 του σχολικού βιβλίου. Συνήθως δίνεται σχετική οδηγία στους διορθωτές.

Α3. Θεώρημα σελ.128 σχολικού βιβλίου, γεωμετρική ερμηνεία σελ.128 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Λ, **β) Λ**, **γ) Λ**, **δ) Λ**, **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε: $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$ για τις οποίες πρέπει $(f\circ g)(x)=x^2-2x$

Β1. Προφανώς $A_{f\circ g}=\{x\in R/\,g(x)\in R\}=R$. Άρα, για κάθε $x\in R$ πρέπει να ισχύει: $(f\circ g)(x)=x^2-2x\Rightarrow f(g(x))=x^2-2x\Rightarrow (x+\beta)^2+\alpha=x^2-2x\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2+2\beta x+\beta^2+\alpha=x^2-2x\Rightarrow (2\beta+2)x+\beta^2+\alpha=0\Rightarrow \begin{cases}2\beta+2=0\\ \beta^2+\alpha=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=-1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

Β2. Έχουμε $f(x)=x^2-1$, όπου $f(-1)=f(1)$ επομένως η συνάρτηση δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται.

Για την $g(x)=x-1$ γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $g'(x)=1>0$, άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, δηλαδή αντιστρέψιμη.

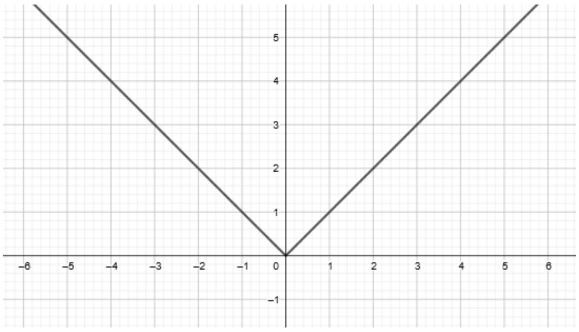
Για την αντίστροφη έχουμε: $y=g(x)\Rightarrow y=x-1\Rightarrow x=y+1$ για κάθε $y\in R$.

Άρα, $g^{-1}(x)=x+1$ για κάθε $x\in R$.

B3. Για την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ έχουμε:

- $A_{g^{-1} \circ f} = \left\{ x \in A_f \,/\, f(x) \in A_{g^{-1}} \right\} = \left\{ x \in R \,/\, x^2 - 1 \in R \right\} = R$ και
- $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = g^{-1}\left(f(x)\right) = x^2 - 1 + 1 = x^2$

Άρα, η συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{\left(g^{-1} \circ f\right)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$ για την οποία η γραφική παράσταση είναι:



B4. Έχουμε $h : [0,1] \to R$ για την οποία ισχύει:

$f(x) + 2 \le h(x) \le g(x) + 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \le h(x) \le x + 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Τότε:

i. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + 1\right) = 2$ και $\lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 2$.

ii. Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{h(x)+7} - 3}{h^2(x) - 4} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(\sqrt{h(x)+7} - 3\right)\left(\sqrt{h(x)+7} + 3\right)}{\left(h^2(x) - 4\right)\left(\sqrt{h(x)+7} + 3\right)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{h(x) - 2}{\left(h(x) - 2\right)\left(h(x) + 2\right)\left(\sqrt{h(x)+7} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(h(x) + 2\right)\left(\sqrt{h(x)+7} + 3\right)} =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε $f(x)=x^3$

Γ1. Έστω σημείο $\mathrm{A}(x_o, f(x_o))$ της C_f, στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}(-2, f(-2))$. Τότε:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\underset{y=f(-2)=-8}{\overset{x=-2}{\Rightarrow}}-8-f(x_o)=f'(x_o)(-2-x_o)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8-{x_o}^3=3{x_o}^2(-2-x_o)\Rightarrow -3{x_o}^2(2+x_o)+{x_o}^3+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3{x_o}^2(2+x_o)+(x_o+2)({x_o}^2-2x_o+4)=0\Rightarrow (x_o+2)(-2{x_o}^2-2x_o+4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o=-2 \text{ ή } x_o=1$$

Άρα:

- Για $x_o=-2$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
  $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Rightarrow y=12x+16$
- Για $x_o=1$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
  $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=3x-2$

Γ2. Η ευθεία ζ δίνεται από τη σχέση $y=3x+\alpha$ με $-2<\alpha<2$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=3x+\alpha$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

Άρα, θέτουμε $g(x)=f(x)-3x-\alpha$, τότε γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $g(-1)=2-\alpha>0$ και $g(1)=-2-\alpha<0$, άρα $g(1)g(-1)<0$. Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει **τουλάχιστον ένα** $x_o\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0$.

Επίσης, η g είναι παραγωγίσιμη με
$g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)<0$ για κάθε $x\in(-1,1)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,1)$, δηλαδή 1-1.

Άρα, υπάρχει μοναδική λύση $x_o\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε
$g(x_o)=0\Rightarrow f(x_o)=3x_o+\alpha$

Γ3. Έχουμε: $y(t)=x^3(t)$ για κάθε t και πρέπει $-2\le x(t)\le 0$ επειδή το σημείο Μ ξεκινάει από το σημείο Ν με τετμημένη -2 και τελειώνει την κίνησή του στο σημείο Ο με τετμημένη 0. Τότε, πρέπει να βρούμε πότε ισχύει $y'(t)=3x'(t)$. Άρα, έχουμε:

$$y'(t)=3x'(t)\Rightarrow\left(x^3(t)\right)'=3x'(t)\Rightarrow 3x^2(t)x'(t)=3x'(t)\overset{x'(t)>0\Rightarrow x'(t)\neq 0}{\Rightarrow}x^2(t)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t)=1 \text{ ή } x(t)=-1$$

Όμως $-2\le x(t)\le 0$, άρα αναγκαστικά πρέπει $x(t)=-1$ και $y(t)=-1$.

Επομένως, το σημείο που ψάχνουμε είναι το $\mathrm{B}(-1,-1)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έχουμε $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$ παραγωγίσιμη, για την οποία:

- $f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^3 x+f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x-1=0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

Δ1. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x-\varepsilon\varphi x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\left(f(x)\cdot\eta\mu x-\varepsilon\varphi x\right)'=$

$$=f'(x)\cdot\eta\mu x+f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$=\frac{f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x+f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0$, επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, υπάρχει $c\in R$ τέτοιο ώστε $g(x)=c\Leftrightarrow f(x)\cdot\eta\mu x-\varepsilon\varphi x=c$, όπου για $x=\frac{\pi}{3}$ έχουμε: $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=c\Leftrightarrow\frac{6\sqrt{3}+6}{6}-\sqrt{3}=c\Leftrightarrow\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=1$, δηλαδή $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)\cdot\eta\mu x-\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1+\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, όπου προφανώς $\eta\mu x\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$.

Δ2. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\eta\mu^3 x-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Άρα, $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^3 x-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}=0\Leftrightarrow\eta\mu^3 x=\sigma\upsilon\nu^3 x\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ η οποία εξίσωση στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\frac{\pi}{4}$.

Επομένως, πρέπει να βρούμε το πρόσημο της f' στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Όμως, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $f'(x)\neq 0$ για κάθε x που ανήκει στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.
Επομένως, η συνάρτηση $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα δύο διαστήματα.

Επίσης, έχουμε $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{1-3\sqrt{3}}{8}}{\frac{3}{16}}=\frac{2\left(1-3\sqrt{3}\right)}{3}<0$ και

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}-1}{8}}{\frac{3}{16}}=\frac{2\left(3\sqrt{3}-1\right)}{3}>0.$$

Άρα, έχουμε:

- $f'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.
- $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

- Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $\frac{\pi}{4}$ την τιμή

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Δ3. Αρχικά, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty+1=+\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$ με $\eta\mu x>0$ για κάθε $x>0$ αλλά κοντά στο 0.
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=1+\infty=+\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=0$ με $\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x<\frac{\pi}{2}$ αλλά κοντά στο $\frac{\pi}{2}$.

Επομένως, έχουμε:

- $f\left(\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\right)\overset{f:\sigma\upsilon\nu}{\underset{f:\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu.}{=}}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=\left[2\sqrt{2},+\infty\right)=\Delta_1$, όπου $3\sqrt{2}\in\Delta_1$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=3\sqrt{3}$.
- $f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\right)\overset{f:\sigma\upsilon\nu}{\underset{f:\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{=}}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)=\left[2\sqrt{2},+\infty\right)=\Delta_2$, όπου $3\sqrt{2}\in\Delta_2$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2)=3\sqrt{3}$.

Άρα, υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\rho_1<\rho_2$ τέτοιες ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=3\sqrt{3}$.

Δ4. Πρέπει να αποδείξουμε την ανίσωση $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2}$. Όμως, έχουμε: $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2} \Leftrightarrow f'(\rho_2)>\dfrac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi}$ επειδή $\rho_2>\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4\rho_2-\pi>0$. Τότε: $f'(\rho_2)>\dfrac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi} \Leftrightarrow f'(\rho_2)>\dfrac{\sqrt{2}}{\rho_2-\dfrac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\rho_2)>\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\rho_2-\dfrac{\pi}{4}} \Leftrightarrow f'(\rho_2)>\frac{f(\rho_2)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\rho_2-\dfrac{\pi}{4}}.$$

Όμως, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{\pi}{4},\rho_2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{\pi}{4},\rho_2\right)$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in \left(\dfrac{\pi}{4},\rho_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=\dfrac{f(\rho_2)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\rho_2-\dfrac{\pi}{4}}$.

Άρα, έχουμε: $f'(\rho_2)>\dfrac{f(\rho_2)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\rho_2-\dfrac{\pi}{4}} \Leftrightarrow f'(\rho_2)>f'(x_o)$

Τώρα, πρέπει να βρούμε την μονοτονία της f'. Όπου:

$$f''(x)=\left(\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)'=\frac{\eta\mu^3 x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=$$

$$=\frac{\eta\mu^3 x+2\eta\mu x-2\eta\mu^3 x}{\eta\mu^4 x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x+2\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=$$

$$=\frac{2\eta\mu x-\eta\mu^3 x}{\eta\mu^4 x}+\frac{2\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=\frac{2-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^3 x}+\frac{2-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}>0$$

Αφού βρισκόμαστε στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ όπου έχουμε $0<\eta\mu^2 x<1$ και $0<\sigma\upsilon\nu^2 x<1$.

Άρα, η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, επομένως η τελευταία ανίσωση γίνεται:

$f'(\rho_2)>f'(x_o) \overset{f':\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} \rho_2>x_o$ το οποίο ισχύει, αφού $x_o \in \left(\dfrac{\pi}{4},\rho_2\right) \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}<x_o<\rho_2$.