(1)

NEA

ΘΕΜΑΤΑ (ΝΕΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σχολικού βιβλίου σελ. 76

Α2. Θεωρία, σχολικού βιβλίου σελ. 104

Α3. α) Ψευδής

β) σελίδα, 136

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f:(1,+\infty)$ με $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^x$

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \mid g(x)\in A_f\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid e^x>1\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x>\ln 1\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=$$

$$=\{x>0\}=(0,+\infty)$$

με $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$

(3)

Για κάθε $x_1 x_2 > 0$:

Β2. $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{e^{x_1}e^{x_2}} - e^{x_1} + 2e^{x_2} \cancel{-2} = \cancel{e^{x_1}e^{x_2}} - e^{x_2} + 2e^{x_1} \cancel{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \xRightarrow{e^x\ 1-1} x_1 = x_2$,

άρα η $(f\circ g)(x)$ είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Αν $\varphi(x) = (f\circ g)^{-1}(x)$, για να βρούμε τον τύπο της, έχουμε ότι:

Για $x>0$:

Θέτω: $f(g(x)) = y \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x(y-1) = y+2 \xLeftrightarrow{y\neq 1}$

$\Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$ όμως $\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1) > 0$

$\Leftrightarrow y \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$

άρα $(f\circ g)^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$ ή $(f\circ g)^{-1}(x) = \varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

με $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

και $x > 0 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) > 0$

$\Rightarrow \boxed{x > 1}$

B3 Έχουμε: $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x) = \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' \Rightarrow$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\varphi'(x) = -\frac{3}{x+2} < 0, \text{ για } x>1, \text{ άρα}$$

η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη

x	1	$+\infty$
φ'		$-$
φ		$\searrow$

B4 • $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln \frac{x-1+3}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right) = +\infty$

Αφού: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{x-1}\right) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\right] = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) f: συν. στο $x_0=0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$ (σχέση (1))

όπου:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x\right) = \lambda$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 1 - \ln\lambda = \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0$$

Έστω $A(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1$, για κάθε $\lambda>0$, παραγ. με

$A'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0 \Rightarrow A: \nearrow$ στο $(0,+\infty)$

Επίσης

$A(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Άρα $A(\lambda)=0 \Leftrightarrow A(\lambda) = A(1) \overset{A:1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = 1$ μοναδική ρίζα.

Γ2]

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-\ln 1-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1.$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=$$

$$=1+0=1$$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow f$: παρ. στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$. Άρα, ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ με εξίσωση

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-1=1\cdot(x-0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x+1$$

Αφού $f'(0)=1=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τον άξονα $x'x$ είναι 45°.

Γ3 Αφού η f: παραγ. στο $x_0=0$ και f: παραγ. στα $(-\infty,0)$, $(0,\frac{3\pi}{2})$ ως ρητή και τριγωνομετρική αντίστοιχα, τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της C_f θα είναι τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου της.

Τότε:

· Για $x<0$:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0 \Rightarrow f'(x)\neq 0 \text{ για } x<0$$

· Για $x>0$:

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$$

Άρα $f'(x)=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \\ \text{ή} \\ \cancel{x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+x} \end{cases}$$

Αδύνατη.

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{4}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $M_1\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ και $M_2\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$

Γ4) Έστω $M(\alpha(t), f(\alpha(t)))$ το τυχαίο σημείο της C_f,

άρα αφού $\alpha \leq 0$ είναι

$$f(\alpha(t)) = \frac{1}{1-\alpha(t)} \quad \text{και} \quad (f(\alpha(t)))' = \frac{\alpha'(t)}{(1-\alpha(t))^2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο M θα έχει εξίσωση

$$y - f(\alpha(t)) = f(\alpha(t))'(x - \alpha(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{1-\alpha(t)} = \frac{\alpha'(t)}{(1-\alpha(t))^2}(x-\alpha(t))$$ που τέμνει τον άξονα

$x'x$ για $y=0$, άρα: ...

$$-\frac{1}{1-\alpha(t)} = \frac{-\frac{\alpha(t)}{3}}{(1-\alpha(t))^2}(x-\alpha(t)) \Rightarrow 3(1-\alpha(t)) = \alpha(t)(x-\alpha(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{3(1-\alpha(t))}{\alpha(t)} + \alpha(t)$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β είναι:

$$x'(t) = \ldots = \frac{1}{\alpha(t)} - \frac{\alpha(t)}{3}$$

Άρα όταν $t=t_0$: $\alpha(t_0) = -1$ μον και $\alpha'(t_0) = -\frac{2}{3}$ μον/χρον.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=e^x+x^2-ex-1 \quad , x\in\mathbb{R}$

Δ1) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με
$f'(x)=e^x+2x-e$
Επίσης, η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με
$f''(x)=e^x+2>0 \Rightarrow f': \uparrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow f': 1-1.$

Επίσης,
f': συν. στο $[0,1]$
και
$\left.\begin{array}{l} f'(0)=1-e<0 \\ f'(1)=2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)\cdot f'(1)<0$

Άρα, από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τ.ω. $f'(x_0)=0$. Όμως, η f' είναι 1-1, άρα x_0 μοναδικό.

Επίσης,
- για $x>x_0 \overset{f':\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0) \Rightarrow f'(x)>0$
- για $x<x_0 \overset{f':\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0) \Rightarrow f'(x)<0$

Άρα

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ολ.ελ.	$\nearrow$

Άρα, η f: ↗ στο $[x_0,+\infty)$
f: ↘ στο $(-\infty,x_0]$ και
παρουσιάζει ολικό ελάχιστο
για $x=x_0$ την τιμή $f(x_0)$,
το οποίο είναι και το
μοναδικό κρίσιμο της f.

Επίσης, από Θ. Fermat γνωρίζουμε ότι $f'(x_0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Rightarrow e^{x_0}=-2x_0+e$

Άρα, έχουμε:

$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1=-2x_0+e+x_0^2-ex_0-1=$

$=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$

Δ2

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$$

αφού:

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(x_0)$ από ερ. Δ1, δηλ.

$f(x)-f(x_0)\geq 0$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty$

και

- $\forall x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$ έχουμε $-1\leq\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\leq 1$.

Δ3 Αρκεί ν.δ.α η $f(x)+x-x_0=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(x_0,1)$.

Έστω $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0,1]$, τότε:

g: συν. στο $[x_0,1]$

και

$g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$, επειδή

$x_0<1 \overset{f:\ \uparrow \text{ στο } [x_0,1]}{\Longrightarrow} f(x_0)<f(1)\Rightarrow f(x_0)<0$

$g(1)=\cancel{f(1)}^{0}+1-x_0=1-x_0>0$, επειδή $x_0<1\Rightarrow 1-x_0>0$

Άρα, από Θ. Bolzano υπ. τουλ. ένα $\rho \in (x_0, 1)$ τ.ω.
$g(\rho)=0$.
Επίσης $g'(x)=f'(x)+1>0$, αφού $f'(x)>0$ στο $(x_0,+\infty)$
άρα $g: \uparrow$ στο $[x_0,1]$, δηλ. 1-1.
Επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho \in (x_0,1)$ τ.ω.
$g(\rho)=0 \Rightarrow f(\rho)+\rho = x_0$

Δ4] Για κάθε $\kappa \in (\rho,1)$, δηλ. $\rho<\kappa<1$ έχουμε:

$$f(x_0) > f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right) \Rightarrow f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)-f(\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)\left(f'(\kappa)+1-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)\, f'(\kappa)$$

Όμως, από ερώτ. (Δ3) έχουμε $f(\rho)+\rho = x_0 \Rightarrow f(\rho)=x_0-\rho$

Άρα

$$f(x_0)-f(\rho) > (x_0-\rho)f'(\kappa) \xRightarrow{x_0-\rho<0} \boxed{\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)} \quad \text{σχέση (1)}$$

Επίσης
f: συν στο $[x_0,\rho]$ και παραγ. στο (x_0,ρ), τότε από Θ.Μ.Τ. ~~έχουμε~~ υπάρχει τουλ. ένα $\xi \in (x_0,\rho)$ τ.ω.

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}.$$

Άρα, από (σχέση 1) έχουμε:

$$f'(\xi) < f'(x) \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} \xi < x.$$

που ισχύει αφού $x_0 < \xi < \rho < x < 1 \Rightarrow \xi < x$.