Εξετάσεις 17 Ιουνίου 2020

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΓΕΛ Γ' Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα θέματα ήταν απαιτητικά με αρκετά δύσκολα ερωτήματα. Στο θέμα Γ απαιτούσε γνώση τριγωνομετρίας που γενικά ταλαιπωρεί τους υποψηφίους, ενώ στο θέμα Δ ήθελε αρκετή προσοχή.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 111

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο – σελ. 104

Α3. Απόδειξη σχολικό βιβλίο – σελ. 74

Α4. α) Ψευδές

β) Αντιπαράδειγμα σελίδα 61

Α5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in R-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(x_1-3)(3x_2+1) \Leftrightarrow 3x_1x_2+x_2-9x_1-3=3x_1x_2+x_1-9x_2-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x_2=10x_1 \Leftrightarrow x_2=x_1$, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Β2. Έστω $y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow yx-3y=3x+1 \Leftrightarrow (y-3)x=1+3y$.

- αν $y=3$ τότε η τελευταία ισότητα δίνει: $0=10$ άτοπο.
- άρα $y \neq 3$, επομένως $x=\frac{1+3y}{y-3}$

Άρα, $f^{-1}(x)=\frac{1+3x}{x-3}, x \neq 3$, δηλαδή $f=f^{-1}$.

Β3. Από το **(Β2)** έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $x \neq 3$ ισχύει

$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow f(f(x))=f(f^{-1}(x)) \Rightarrow (f \circ f)(x)=x$

Β4. Έστω $L=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)$. Τότε:

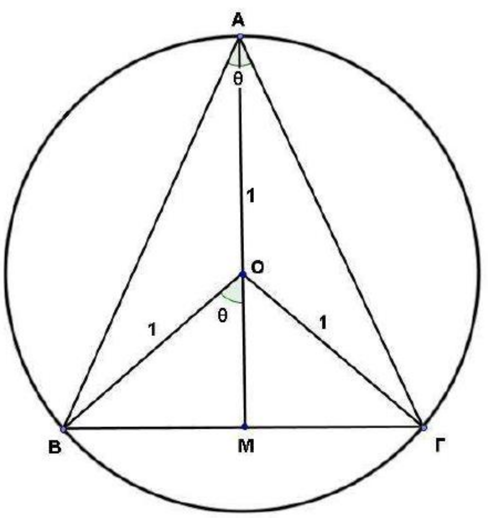
Έχουμε:

$$\left|\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right|\le 1\Rightarrow |f(x)|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right|\le |f(x)|\Rightarrow -|f(x)|\le f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\le |f(x)|$$

με $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}|f(x)|=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|=0$ και $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(-|f(x)|\right)=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\right)=0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $L=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $E_{AB\Gamma}=\frac{AM\cdot B\Gamma}{2}$. Όμως, τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΜΓ είναι ίσα αφού έχουν τις πλευρές ΟΒ και ΟΓ ίσες ως ακτίνες, την ΟΜ κοινή και προφανώς οι γωνίες Ο είναι ίσες, αφού η επίκεντρη γωνία που βαίνει σε ίδιο τόξο με μία εγγεγραμμένη, είναι πάντοτε διπλάσια της εγγεγραμμένης. Άρα, το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ορθογώνιο. Τότε, έχουμε:

$\eta\mu\theta=\frac{BM}{1}\Rightarrow \eta\mu\theta=BM$ και

$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{OM}{1}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=OM$

Επομένως, έχουμε: $AM=AO+OM=1+\sigma\upsilon\nu\theta$ και $B\Gamma=2\cdot BM=2\eta\mu\theta$, δηλαδή, αν $E(\theta)$ η συνάρτηση που ορίζει το εμβαδόν ΑΒΓ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\pi)$, έχουμε:

$$E(\theta)=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)2\eta\mu\theta}{2}=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta.$$

Γ2. Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$E'(\theta)=-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=-\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=$$

$=(\sigma\upsilon\nu\theta+1)(2\sigma\upsilon\nu\theta+1)$. Άρα, έχουμε:

$$E'(\theta)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=-1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \theta=\pi \text{ απορ. ή } \theta=\frac{\pi}{3}$$

Άρα, έχουμε:

$E'(\theta)<0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right) \Rightarrow E$: γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και

$E'(\theta)>0 \Leftrightarrow \theta \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow E$: γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$

Δηλαδή, η συνάρτησε E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\theta=\frac{\pi}{3}$ την τιμή

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Γ3. Έχουμε $\Delta_1=E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\right)\underset{E:\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\overset{E:\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}E(x),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ και $\frac{3}{4}\in\Delta_1$ με την Ε να είναι 1-1 στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$, επομένως υπάρχει μοναδικό $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$.

Επίσης, $\Delta_2=E\left(\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)\underset{E:\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu.}{\overset{E:\sigma\upsilon\nu}{=}}\left[E(\pi),\lim\limits_{x\to\pi^-}E(x)\right)=\left[\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$ και $\frac{3}{4}\in\Delta_1$ με την Ε να είναι 1-1 στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ τέτοιο ώστε $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$.

Άρα, υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1,θ_2 τέτοιες ώστε το εμβαδόν να είναι ίσο με $\frac{3}{4}$.

Γ4. Η συνάρτηση E είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$, καθώς επίσης και παραγωγίσιμη στα $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$, τέτοια ώστε:

$$E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}\quad\text{και}\quad E'(\xi_2)=\frac{E(\theta_2)-E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}$$

Επομένως:

$$\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\mathrm{E}'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)\mathrm{E}'(\xi_2)\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}}{\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)}=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)\frac{\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\left(\theta_2-\frac{\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\Leftrightarrow 0=0 \text{ ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$. Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0+1-1=0$ και $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow f'$: γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο $(0,+\infty)$. Επίσης, έχουμε:

- για $x>1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$: γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$
- για $x<1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$: γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ την τιμή $f(1)=0+1-\ln\lambda=-\ln\lambda$. Δηλαδή, για κάθε $\lambda>0$ το ακρότατο της συνάρτησης f είναι το σημείο $\mathrm{A}(1,-\ln\lambda)$, που σημαίνει ότι για $x=1$ έχουμε $y=-\ln\lambda\in R$, άρα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in(0,+\infty)$ το σημείο Α διατρέχει την κατακόρυφη ευθεία $x=1$.

Δ2. Έχουμε $x^x\geq\lambda x\Leftrightarrow\ln\left(x^x\right)\geq\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x\geq\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

Όμως, από τα ερώτημα **Δ1** έχουμε ότι $f(x)\geq-\ln\lambda$ για κάθε $x>0$. Επομένως, πρέπει $-\ln\lambda\geq 0\Leftrightarrow\ln\lambda\leq 0\Leftrightarrow\ln\lambda\leq\ln 1\Leftrightarrow\lambda\leq 1$, άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος λ είναι η $\lambda=1$.

Δ3. Έστω σημείο $\left(x_o,\mathrm{g}(x_o)\right)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τότε:

$$y-g(x_o)=g'(x_o)(x-x_o)\overset{x=0}{\underset{y=0}{\Rightarrow}}-g(x_o)=-x_o\cdot g'(x_o)\Rightarrow g(x_o)=x_o\cdot g'(x_o)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o^{x_o}=x_o^{x_o}(\ln x_o+1)x_o\Rightarrow(\ln x_o+1)x_o=1\Rightarrow x_o\ln x_o+x_o-1=0\overset{x_o>0}{\Rightarrow}\ln x_o+1-\frac{1}{x_o}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_o)=0\Rightarrow f'(x_o)=f'(1)\overset{f':1-1}{\underset{\alpha\pi\acute{o}\ \Delta 1}{\Rightarrow}}x_o=1$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $\left(1,g(1)\right)$ δίνεται από τη σχέση: $y-1=1(x-1)\Rightarrow y=x$

Δ4.

i. Για $x>0$ η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών. Επίσης, $h(0)=1$ και

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(e^{\ln x^x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(e^{x\ln x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\right)=1$$, επειδή

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$, άρα η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_o=0$. Άρα, η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

ii. Έστω συνάρτηση $A(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)\,dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt$, $x\in[0,1]$. Τότε, η συνάρτηση A είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης:

- $$A(0)=\int_0^1 h(1-t)\,dt=\left\{\begin{array}{c}1-t=x\\ dt=-dx\\ t=1\Rightarrow x=0\\ t=0\Rightarrow x=1\end{array}\right\}=\int_1^0 -h(x)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx>0$$, επειδή για

  $$x>0\Rightarrow h(x)=x^x=e^{\ln x^x}>0\Rightarrow\int_0^1 h(x)\,dx>0$$

- $A(1)=3-2\int_1^2 g(t)\,dt<0$, επειδή από το ερώτημα **Δ2** για $\lambda=1$, έχουμε

  $$x^x\geq x\Rightarrow g(x)\geq x\Rightarrow\int_1^2 g(x)\,dx>\int_1^2 x\,dx\Rightarrow\int_1^2 g(x)\,dx>\frac{3}{2}\Rightarrow 3-2\int_1^2 g(x)\,dx<0$$

Άρα, $A(0)A(1)<0$, επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $A(\rho)=0\Rightarrow\rho^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)\,dt\right)+(1-\rho)\int_0^1 h(1-t)\,dt=0$

Επιμέλεια:

Ζαχαράκης Στέφανος

Μαργαριτέλη Ελένη

Παπαπλιούρας Νίκος

Φούντος Χρήστος