Εξετάσεις 17 Ιουνίου 2020

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΓΕΛ Γ' Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν όλο το εύρος της φετινής περιορισμένης ύλης. Το θέμα Γ περιλάμβανε βασικές μεθοδολογίες ενώ στο θέμα Δ ήθελε ιδιαίτερη προσοχή.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σελίδα σχολικού 76

Α2. Θεωρία, σελίδα σχολικού 104

Α3. α) Ψευδής β) αιτιολόγηση σελίδα 136, σχολικού

Α4. α) **Λ** β) **Σ** γ) **Σ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $x>1$ και $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Άρα,

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ g(x)>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x>\ln 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\{x>0\}$$

με $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$

Β2. Για κάθε $x_1,x_2>0$ έχουμε:

$$f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_1}+2e^{x_2}\cancel{-2}=\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_2}+2e^{x_1}\cancel{-2}\Leftrightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\overset{e^x:1-1}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$$

Άρα η $(f\circ g)$ είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)$, για να βρούμε τον τύπο της, θέτουμε:

$$f(g(x))=y\Leftrightarrow\frac{e^x+2}{e^x-1}=y\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{y-1},$$ όμως $x>0$, άρα και

$$\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\frac{y+2}{y-1}>1\Leftrightarrow\frac{y+2}{y-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y>1$$

Άρα, $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{x-1}$, $x>1$

Β3. Η συνάρτηση $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{x-1},\quad x>1$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{(x-1)^{\cancel{2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi'(x)=-\frac{3}{x+2}<0,\qquad \text{για } x>1$$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4.

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\ln\left(\frac{x-1+3}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\right]=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\right]=\ln1=0$$

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\qquad \textbf{(1)}$$

Όπου:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda\end{array}\right\}\overset{(1)}{\Rightarrow}1-\ln\lambda=\lambda\Rightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0$$

Έστω $A(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1$, για κάθε λ>0, παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$A'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0$, για λ>0 άρα η συνάρτηση $A(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι για $\lambda=1$, είναι $A(1)=\ln1+1-1=0$

Άρα, $A(\lambda)=0\Leftrightarrow A(\lambda)=A(1)\overset{A:1-1}{\Leftrightarrow}\lambda=1,\quad$ μοναδική ρίζα.

Γ2.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-\ln1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

και

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Αφού $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.

Άρα ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ με εξίσωση:

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftarrow y-1=x\Rightarrow(\varepsilon): y=x+1$$

Επίσης, είναι $f'(0)=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$, επομένως η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x'x είναι $\frac{\pi}{4}$ ή 45°.

Γ3. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και παραγωγίσιμη στα $(-\infty,0),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$, ως ρητή και τριγωνομετρική αντίστοιχα, τα κρίσιμα σημεία της C_f θα είναι τα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγός της.

Τότε:

- Για $x<0$: $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0\Rightarrow f'(x)\neq0$
- Για $x>0$: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και

$$f'(x)=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\\ \quad\text{ή}\qquad k\in\mathbb{Z}\\ \cancel{x}=2k\pi-\frac{\pi}{2}+\cancel{x},\quad\text{αδύνατη}\end{cases}\Leftrightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \text{ ή }\ x=\frac{5\pi}{4}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $M_1\left(\frac{\pi}{4},\sqrt2\right)$ και $M_2\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt2\right)$.

Γ4. Έστω $M\left(\alpha(t), f(\alpha(t))\right)$ το τυχαίο σημείο της C_f άρα αφού $\alpha \le 0$ είναι:

$$f(\alpha(t)) = \frac{1}{1-\alpha(t)} \quad \text{και} \quad \left(f(\alpha(t))\right)' = \left(\frac{1}{1-\alpha(t)}\right)' = \frac{\alpha'(t)}{\left(1-\alpha(t)\right)^2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ θα έχει εξίσωση:

$$y - f(\alpha(t)) = f'(\alpha(t))\left(x-\alpha(t)\right) \Rightarrow y - \frac{1}{1-\alpha(t)} = \frac{\alpha'(t)}{\left(1-\alpha(t)\right)^2}\left(x-\alpha(t)\right), \text{ που}$$

τέμνει τον άξονα x'x για $y = 0$, άρα:

$$-\frac{1}{1-\alpha(t)} = \frac{-\frac{\alpha(t)}{3}}{\left(1-\alpha(t)\right)^2}\left(x-\alpha(t)\right) \Rightarrow 3\left(1-\alpha(t)\right) = \alpha(t)\left(x-\alpha(t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{3\left(1-\alpha(t)\right)}{\alpha(t)} + \alpha(t)$$

Οπότε, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β είναι:

$$x'(t) = \left(\frac{3\left(1-\alpha(t)\right)}{\alpha(t)} + \alpha(t)\right)' = \frac{1}{\alpha(t)} - \frac{\alpha(t)}{3}$$

Άρα όταν $t = t_0 : \alpha(t_0) = -1$ μονάδα και $\alpha'(t_0) = -\frac{2}{3}$ μονάδα/χρόνος

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με $f'(x) = e^x + 2x - e$.

Επίσης, η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με
$f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' : \nearrow \text{ στο } \mathbb{R} \Rightarrow f' : 1-1$

Θα έχουμε:

- f' : συνεχής στο $[0,1]$, και
- $\left.\begin{array}{l} f'(0) = 1-e < 0 \\ f'(1) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
Όμως, η f' είναι 1-1, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Επίσης,

- Για $x > x_0 \overset{f':\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$
- Για $x < x_0 \overset{f':\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Άρα,

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ.	$\nearrow$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ την τιμή $f(x_0)$, το οποίο είναι και το μοναδικό ακρότατο της f.

Επισης, από Θ.Fermat γνωρίζουμε ότι
$f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = -2x_0 + e$

΄Αρα, έχουμε:
$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 = -2x_0 + e + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right) = +\infty$, αφού:

- **Για κάθε** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$, από ερ. Δ1, δηλαδή $f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Επίσης, $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) = +\infty$, και,

- **Για κάθε** $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, έχουμε $-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1$.

Δ3. Αρκεί ν.δ.ο. η $f(x) + x - x_0 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(x_0, 1)$.

Έστω $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$, τότε:

- g: συνεχής στο $[x_0, 1]$, και
- $g(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0) < 0$, επειδή:

$x_0 < 1 \overset{f:\nearrow \sigma\tau o [x_0,1]}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) \Rightarrow f(x_0) < 0$

- $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$, επειδή $x_0<1\Rightarrow 1-x_0>0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1)$, τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$.

Επίσης, $g'(x)=f'(x)+1>0$, αφού $f'(x)>0$, στο $(x_0,+\infty)$, άρα $g:\nearrow$ στο $[x_0,1]$, δηλαδή 1-1.

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\rho\in(x_0,1)$, τέτοιο ώστε $g(\rho)=0\Rightarrow f(\rho)+\rho=x_0$.

Δ4. Για κάθε $\kappa\in(\rho,1)\Rightarrow\rho<\kappa<1$, έχουμε:

$$f(x_0)>f(\rho)\cdot(f'(\kappa)+1)\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)\cdot(f'(\kappa)+1)-f(\rho)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)\cdot(f'(\kappa)+1-1)\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)\cdot f'(\kappa)$$

Όμως, από ερώτημα Δ3 έχουμε $f(\rho)+\rho=x_o\Rightarrow f(\rho)=x_o-\rho$, άρα

$$f(x_0)-f(\rho)>(x_0-\rho)\cdot f'(\kappa)\overset{x_0-\rho<0}{\Rightarrow}\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)\qquad(1)$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}.$$

Άρα, από σχέση (1) έχουμε: $f'(\xi)<f'(\kappa)\overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow}\xi<\kappa$, που ισχύει αφού $x_0<\xi<\rho<\kappa<1\Rightarrow\xi<\kappa$.